Первое домашнее задание по курсу «Теория игр-2»: кооперативные игры.

Ниже вы найдёте две версии первого домашнего задания по курсу теория игр-2. Версии отличаются сложностью и, как следствие, максимальной оценкой, которую за них можно получить. Сдавать можно только одну: выбирайте, что вам по силам. В первой версии домашнем задании каждая задача оценивается из 5 баллов по формуле «оценка = 1+(количество верно решенных пунктов)». Во втором — «оценка = 2+2*(количество верно решенных пунктов)». Результирующая оценка по работе — среднее арифметическое задач по оценкам. Нормировки оценок по результатам проверки не будет, сколько задач решено, такова и оценка; то есть баллы за версию «на 5» — по 10 бальной шкале!

В версии «на 10» есть бонусное задание. Его можно взять вместо любой из задач, факт замены надо явно отразить на титульном листе работы. Кроме того, в каждом задании «на 10» есть бонусные пункты, они тоже считаются и поднимают оценку за задачу.

Проверка выполнения домашнего задания включает два этапа: проверку письменной работы и устную защиту.

Процедура устной защиты такова:

1. При сдаче работы автор явно указывает на титульном листе, какие задачи (с пунктами!) выносятся на защиту. Все остальные задачи при проверке игнорируются, как будто их нет.

2. Непосредственно перед устным ответом случайно выбирается одна из вынесенных на защиту задач (кроме бонусной задачи из варианта «на 10»). По умолчанию, студент рассказывает все решенные им пункты, но проверяющий вправе выбрать один или несколько по своему усмотрению (разумеется из тех, что студент решал).

3. Студент рассказывает решение задачи, при ответе разрешается использовать только свою работу. Нужно уметь определять все используемые понятия, четко обосновывать все логические переходы, понимать, где и как используются (или не используются) те или иные условия задачи.

4. Возможны дополнительные вопросы по непосредственно связанным с решением задачи темам.

5. Устный ответ студента оценивается отдельно, по соответствующей шкале (из 5 или из 10 баллов). Оценка за устный ответ оценивает понимание студентом решения задачи, а также владение необходимыми понятиями и методами. Примерные критерии таковы:

   (a) «Неуд.» — допущено несколько грубых ошибок, нет «идеи» решения, студент не знает основных понятий, решение не авторское.

   (b) «Удовл.» — есть верная идея решения, но при решении задачи допущена грубая ошибка. Или решение не полное. Или допущено очень много мелких ошибок.

   (c) «Хор.» — есть верная идея решения, решение практически доведено до конца, но в решении есть ошибка. После того, как ошибка обнаружена, студент понимает, как её исправить и верно решить задачу. Или допущено много мелких ошибок и неточностей.

   (d) «Отл.» — есть верная идея решения, решение доведено до конца, могут присутствовать мелкие недочеты и ошибки.

   (e) Успешное решение пунктов со звёздочкой частично компенсирует недостатки в других пунктах. То есть, если студент допустил грубую ошибку в решении основного задания, но успешно решил задачу со * (а лучше обе!), то он всё равно может предентовать на отличную оценку.

6. Оценка за устный ответ не привязана напрямую к числу решенных пунктов, но ограничена сверху их числом. То есть, если решен всего один пункт, то оценка не может быть больше 4-х, два - 6 и т. д.

Оценка за устный ответ является *максимумом*, из которого оцениваются *все* задачи при проверке письменной работы. То есть если устный ответ был оценен в 7 баллов, то при максимум, который можно получить за (любую!) задачу при проверке письменной работы — 7. А если устный ответ оценен в 1 балл, то письменную работу можно уже и не проверять. Вывод: выносите на защиту только те задачи, решение которых вы хорошо понимаете.

Домашнее задание весит 0.3 от итоговой оценки.

Программа по кооперативным играм.

1. Понятие кооперативной игры. Характеристическая функция. Дележ. Трансферабельная и нетрансферабельная полезности. Примеры кооперативных игр.

2. Понятие ядра игры. Примеры игр с пустым ядром. Простые игры. Достаточные условия непустоты ядра: супермодулярные игры (доказательство).

3. Критерии непустоты ядра. Сбалансированность. Теорема Бондаревой-Шепли (сильная форма, с доказательством). Примеры применения критерия. Экономика обмена. Существование ядра экономики.

4. Понятие решения игры и его аксиоматической характеризации. Основные аксиомы теории кооперативных игр.

5. Вектор Шепли. Аксиоматическая характеризация через аддитивность (с доказательством). Аксиоматическая характеризация через сильную монотонность (без доказательства).

6. Аксиоматическая характеризация ядра через reduced game property (rgp) (с частичным доказательством).

7. Нуклеолус как селектор ядра. Немонотонность любого селектора ядра.

8. Аксиоматическая характеризация нуклеолуса (через RGP, без доказательства).

Литература по кооперативным играм.

1. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. Кооперативные игры: решения и аксиомы, Европейский Университет в Санкт-Петербурге, 2004
   Одна из лучших книг по кооперативным играм. Из недостатков — практически не достать.

2. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели, М. Мир, 1991.
   Главы 4 и 5.

3. Данилов В. И. Лекции по теории игр. М.: Российская экономическая школа, 2002.
   Главы 20–23.

4. Peleg B., Sudholter P. Introduction to the theory of cooperative games. Kluwer Acad. Publiushers, 2003
   Одна из лучших книг по кооперативным играм. Несколько трудна для чтения, но очень систематична и последовательна.

5. Myerson R. Game Theory. Analysis of Conflict. Harvard University Press, 1991.
   Глава 9.

6. Binmore K. Playing for Real: A Text on Game Theory. Oxford University Press, 2007.
   Глава 19. Одна из лучших книг-введений по теории игр. Настоятельно рекомендую.

7. Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R. Microeconomic Theory. Oxford University Press, 1995.
   Все, что вы хотели знать про микроэкономику, но боялись спросить. В частности, про экономику обмена, конкурентное равновесие и ядро экономики можно прочитать в главе 18.

Версия «на 5».

1. Илья Муромец, Алеша Попович и Добрыня Никитич охотятся на Змеев-Горынычей. В одиночку никто из них не может одолеть ни одного Змея-Горыныча. Втроем — могут одолеть одного Змея-Горыныча за час, вдвоем — $\alpha \in (0, 1)$ Змеев-Горынычей за час. Найдите для произвольного α:
   - ядро;
   - вектор Шепли;
   - нуклеолус.
   - Является ли игра супермодулярной?

2. Группа из n гномов нашла много золотых слитков в пещере. Начинается обвал, поэтому нужно срочно убегать из пещеры. После обвала пещера окажется недоступной. Слитки золота тяжелы: в одиночку ни один гном не может нести слиток, но два гнома могут свободно нести один слиток. Снаружи пещеры слитки золота можно продать по цене 1 рубль за штуку. Найдите для произвольного n:
   - ядро;
   - вектор Шепли;
   - нуклеолус.
   - Является ли игра супермодулярной?

3. Нефть можно доставить из точки A в точку D по нефтепроводу. Структура нефтепровода, пропускная способность труб, а также информация о собственниках труб:

Узлы	A	B	C	D
A		3	2	
B			β	2
C				3

Труба	Собственник
AB	Андрей
BD	Борис
BC	Володя
AC	Борис
CD	Андрей

   Для произвольного β найдите:
   - ядро;
   - вектор Шепли;
   - нуклеолус.
   - Является ли игра супермодулярной?

4. Три владельца домов, Антон, Бенжамин и Владлен, собираются продать свои дома. Потенциальные покупатели — Галина, Диана и Евгения — хотели бы купить каждая по одному дому. Владельцы ценят свои дома в 100, 200 и 250 у.е. соответственно. Покупательницы по-разному оценивают дома продавцов. Ценности покупательниц представлены в таблице ниже. Полезность игроков следует считать линейной по деньгам.

	Антон	Бенжамин	Владлен
Галина	600	400	300
Диана	500	320	300
Евгения	400	250	150

   Найдите:
   - ядро;
   - вектор Шепли;
   - нуклеолус.
   - Является ли игра супермодулярной?

Версия «на 10».

1. Экономика обмена.

Рассмотрим экономику обмена, в которой есть всего два агента и два вида товаров. Пусть начальные запасы первого агента равны $(4,1)$, а второго — $(1,3)$. Полезности игроков равны $u_1 = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$, $u_2 = y_1^{3/4} y_2^{1/4}$, где x_i — потребление i-го товара первым агентом, а y_i — вторым. Предполагаем, что полезность игроков трансферабельна!

1. Представьте данный рынок в виде кооперативной игры. Найдите ядро игры, нуклеолус и вектор Шепли.
2. Теперь предположим, что в этой экономике стало 4 агента — добавились «клон» первого игрока и «клон» второго. Найдите ядро.
3. А теперь пусть оба игрока «растиражированы» m раз (m-replica economy). Найдите ядро для произвольного m.
4. Пусть m стремится к бесконечности. Что происходит с ядром?
5. * Дайте определение конкурентного (Вальрасовского) равновесия. Как связаны конкуретное равновесие и ядро? А в «растиражированной» игре?
6. * Существует ли такой рынок, что конкуретное равновесие совпадает с нуклеолусом? А не совпадает? Можно ли вывести какие либо разумные, необходимые и / или достаточные условия совпадения?

2. Простые игры.

Рассмотрим модель принятия решений собранием акционеров фирмы: есть n акционеров, каждый из них обладает долей q_i акций, решения принимаются простым большинством.

1. Представьте данную задачу в виде простой кооперативной игры и найдите явные формулы для вычисления вектора Шепли.
2. Оцените вычислительную сложность расчёта вектора Шепли по этим формулам.
3. Найдите явные формулы для вычисления нуклеолуса для $n = 4$.
4. Правда ли, что если в данном классе игр ядро не пусто, то вектор Шепли является селектором ядра?
5. *Удовлетворяет ли нуклеолус на данном классе игр коалиционной монотонности? А если в такой формулировке: пусть доля акций i-го акционера возросла; правда ли, что соответствующая компонента нуклеолуса не стала меньше?
6. * Предложите алгоритм рассчета нуклеолуса для данного класса игр. Крайне желательно, чтобы алгоритм отличался в лучшую сторону от последовательного решения задач ЛП симплекс методом. Оцените вычислительную сложность данного алгоритма.

3. Reduced Game Property (RGP), ядро, нуклеолус и вариации на тему.

1. Докажите, что ядро удовлетворяет RGP на множестве всех игр, имеющих как минимум 3 игрока и непустое ядро.
2. Придумайте решение игры не являющееся ядром игры и удовлетворяющее аксиомам RGP, непустоты (NE), индивидуальной рациональности (IR) и супераддитивности (SUPA) на классе игр, имеющих непустое ядро и не более двух игроков.
3. Удовлетворяет ли вектор Шепли RGP в классе всех кооперативных игр? А на классе всех супермодулярных (выпуклых) кооперативных игр?
4. Пусть $e(S,x) = v(S) - x(S)$. Пусть $\mathcal{D}(\alpha, x, v) = \{S \subset N | e(S,x) \geqslant \alpha\}$. Пусть (N,v) — кооперативная игра, пусть x — дележ. Докажите, что x является преднуклеолусом тогда и только тогда, когда $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ непустой набор коалиций $\mathcal{D}(\alpha, x, v)$ будет сбалансированным на N. Постарайтесь провести доказательство «прямым» рассуждением, без привлечения дополнительных понятий и теорем.

5. * Удовлетворяет ли нуклеолус RGP на классе всех кооперативных игр? А преднуклеолус? Постарайтесь провести доказательство «прямым» рассуждением, без привлечения дополнительных понятий и теорем.

6. * Рассмотрим класс кооперативных игр, имеющих не более 4 игроков. Предложите решение игры, удовлетворяющее аксиомам RGP, однозначности (SIVA), ковариантности (COV), анонимности (AN), но не совпадающее с преднуклеолусом.

4. Об одном контрпримере, монотонности и рынках обмена.

Рассмотрим кооперативную игру, заданную характеристической функцией:

$$u(S) = \begin{cases} 0, & \text{если } S \in \{\{1,2,3,4\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}, \\ -1, & \text{если } |S| = 3, \\ -4, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. Найдите ядро этой игры, вектор Шепли, нуклеолус.

2. Докажите, что игра является полностью сбалансированной и постройте соответствующую ей экономику обмена.

3. Используя данный пример докажите, что решение игры, являющееся селектором ядра не может быть коалиционно-монотонным.

4. Докажите, что если в кооперативной игре число игроков не превышает 3, то существует коалиционно-монотонный селектор ядра.

5. * Найдите конкурентное равновесие в экономике обмена из п. 2.

6. * Как известно, конкурентное равновесие в экономике обмена является селектором ядра соответствующей кооперативной игры. Кроме того, известно, что любую полностью сбалансированную игру можно представить в виде некоторой экономики обмена. Может ли такое быть, что в некоторой экономике обмена при возрастании начальных запасов некоторого агента его полезность в конкурентном равновесии уменьшается? Как ответ на данный вопрос соотносится с утверждением из п. 3?

5. Супермодулярные (выпуклые) игры и вектор Шепли.

Рассмотрим кооперативную игру (N, v). Пусть p_j, $j = 1, ..., n!$ — перестановка игроков из N. Обозначим за m_{p_j} вектор предельных вкладов игроков при перестановке p_j: $m^i_{p_j} = v(\{p^1_j, ..., p^i_j\}) - v(\{p^1_j, ..., p^{i-1}_j\})$. Выпуклая оболочка всех возможных векторов m_{p_j} называется множеством Вебера: $W(N, v)$.

1. Рассмотрим кооперативную игру «рынок перчаток». Пусть m игроков имеют по одной правой перчатке, а k игроков — по одной левой. Каждая пара перчаток приносит коалиции один рубль. Перчатки без пары ничего не стоят. При каких m и k эта игра будет иметь непустое ядро? А будет супермодулярной? Найдите нуклеолус и вектор Шепли для произвольных m и k. Какое из этих двух значений представляется более осмысленным в данной ситуации? Если не получается решить задачу для произвольных значений m и k, попробуйте решить хоть для каких-то.

2. Докажите, что супермодулярная игра полностью сбалансированна.

3. Докажите, что если ядро и множество Вебера совпадают, то игра является супермодуляной.

4. Докажите, что любое однозначное и анонимное решения кооперативной игры, зависящего только от векторов предельных вкладов игроков: m_{p_j}, обязательно является линейным (помните, что любое однозначное решение игры это функция, действующая из пространства $\mathbb{R}^{2^n-1}$ в пространство $\mathbb{R}^n$). Достаточно ограничится случаем $n = 3$.

5. * Докажите, что ядро произвольной кооперативной игры обязательно содержится в множестве Вебера.

6. * Докажите, что решение кооперативной игры, удовлетворяющее однозначности (SIVA), Парето-оптимальности (PO), одинаковому отношению к равным (ETP) и сильной монотонности является вектором Шепли.

6. * Вольная номинация.

Заменяет любую из задач выше при выведении оценки за работу!

Изучите самостоятельно какую-либо концепцию решения кооперативных игр, (разумеется из тех, что не разбирались в курсе, т.е. не ядро, не вектор Шепли и не нуклеолус). Напишите эссе в поддержку выбранной вами концепции решения. Постарайтесь затронуть следующие вопросы:

1. Что нового предлагает данное решение по сравнению с прочими? В чем его особенности в сравнении с другими подходами? На какие вопросы оно позволяет получить ответы?

2. В каких моделях кооперативной теории игр применение данной концепции решения наиболее уместно и оправдано?

3. При каких условиях данное решение существует?

4. Какими алгоритмами его можно построить? Какова их вычислительная сложность?

5. Какими аксиомами характеризуется данное решение? Каким аксиомам оно удовлетворяет? Как с аксиоматической точки зрения оно соотносится с другими решениями?

6. Кто и когда придумал это решение? Вывел его основные свойства? Дал аксиоматическую характеристику?

В эссе не нужно приводить доказательства теорем, достаточно корректных ссылок. Рекомендую особое внимание уделить п. 2, т. е. моделям, в которых данное решение работает. Постарайтесь при написании эссе опираться на первоисточники т. е. научные статьи, а не на учебники. При проверке различных работ на оригинальность (точнее, на плагиат) в первую очередь будет оцениваться подборка источников и качество работы с ними. Объем эссе не должен превышать 4-х печатных страниц: постарайтесь кратко и ёмко изложить всё существенное. Вариации темы возможны, но обговариваются индивидуально.