

До сих пор заданному числовому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (*)

в качестве его суммы приписывался предел его частичных сумм $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Данный предел мог быть конечен или бесконечен определенного знака. “Колеблющийся” расходящийся ряд для нас всегда оказывался лишенным суммы, и подобные ряды из рассмотрения исключались.

Между тем, ряду $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ещё со времен Лейбница в качестве суммы приписывалось число $\frac{1}{2}$. Эйлер, например, мотивировал это тем, что из разложения $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ (которое в действительности верно лишь при $|x| < 1$!) при подстановке вместо x как раз 1, получается $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

В современном анализе, в основу кладётся то, или иное точно сформулированное определение “*обобщённой суммы ряда*”, не придуманное для конкретного ряда, но приложимое к целому классу таких рядов.

Определение “*обобщённой суммы*” обычно подчиняется двум требованиям:

1) Линейность.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (p a_n + q b_n) = pA + qB.$$

2) Регулярность.

Ряд, сходящийся в обычном смысле к сумме S должен иметь “*обобщённую сумму*”, и притом тоже равную S .

I. Метод Пуассона-Абеля (метод степенных рядов).

По данному числовому ряду (*) строится степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$. Если этот ряд для $0 < x < 1$ сходится, и его сумма $f(x)$ при $x \rightarrow 1 - 0$ имеет предел S , то это число S и называют *обобщённой (в смысле Пуассона-Абеля) суммой данного ряда*.

Обозначение: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (A).

1.1. Просуммировать по методу Пуассона-Абеля следующие ряды:

$$(a) \bullet \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n;$$

$$(б) \bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n;$$

$$(в) \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta, \quad \left(0 \leq \theta < 2\pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right);$$

$$(г) \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta, \quad (0 < \theta < 2\pi, \theta \neq \pi).$$

II. Метод Чезаро (метод средних арифметических).

По частичным суммам S_n ряда (*) строится последовательность их средних арифметических:

$$\alpha_1 = S_1, \quad \alpha_2 = \frac{S_1 + S_2}{2}, \dots, \alpha_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n}, \dots$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = S$, то это число называется обобщенной (в смысле Чезаро) суммой данного ряда. Обозначение: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad (\mathbf{C}, 1)$.

1.2. Просуммировать по методу Чезаро (если это возможно), следующие ряды:

$$(a) \bullet \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n;$$

$$(б) 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \dots;$$

(в) * преобразуем ряд из пункта а) следующим образом: член ± 1 , стоявший в а) на k -ом месте переместим на 2^k -ое место, остальные места заполним нулями;

$$(г) \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta, \quad \left(0 \leq \theta < 2\pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right);$$

$$(д) \bullet \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta, \quad (0 < \theta < 2\pi, \theta \neq \pi).$$

1.3. • (необходимое условие суммируемости по Чезаро)

Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем по Чезаро, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

Замечание: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем по Чезаро, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится для $0 < x < 1$.

Теорема: (Штольца) Пусть последовательность $\{y_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, причем $\exists N$, что для $\forall n \geq N$ выполнено $y_{n+1} > y_n$. Кроме того, пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ (конечный или бесконечный, но одного знака). Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Замечание: отметим, что теорема Штольца может рассматриваться, как дискретный аналог правила Лопиталя.

1.4. (теорема Коши) Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и имеет предел a . Докажите, что последовательность $\left\{ \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\}$ средних арифметических значений элементов последовательности $\{a_n\}$ сходится к тому же самому пределу a .

(а) Докажите теорему Коши, используя теорему Штольца;

(б) Докажите теорему Коши, без использования теоремы Штольца.

Замечание: из теоремы Коши следует регулярность метода Чезаро.

1.5. ★ Докажите регулярность метода Пуассона - Абеля.

Теорема Фробениуса.

1.6. • Пусть $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$. Докажите выполнимость следующего тождества (преобразование Абеля):

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \quad (**)$$

Замечание: этим преобразованием удобно пользоваться в случае, когда поведение при $n \rightarrow +\infty$ суммы A_n известно, а $b_k = b(k)$ — гладкая функция.

Пусть $b(k)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0; +\infty)$ функция и $A(x) = \sum_{k=1}^x a_k$. Так

что $A(x)$ — ступенчатая функция: $A(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1; \\ A_k, & \text{при } k \leq x < k+1. \end{cases}$

Тогда формулу (**) можно переписать в виде:

$$S_n = A(n) b(n) - \sum_{k=1}^{n-1} A(k) \frac{b(k + \Delta k) - b(k)}{\Delta k} \cdot \Delta k = A(n) b(n) - \int_1^n A(x) b'(x) dx.$$

Поэтому, преобразование Абеля иногда называют *дискретным аналогом формулы интегрирования по частям*.

1.7. ★ Пусть радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ равен числу R . Докажите, что при $|x| < R < 1$ выполняется тождество:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \text{ где } A_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

1.8. * (теорема Фробениуса)

Докажите, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу Чезаро к конечной сумме A , то одновременно он суммируем также по методу Пуассона-Абеля, и притом к той же сумме A .

Замечание: существуют ряды, суммируемые по Пуассону - Абелю, но не суммируемые по Чезаро. Например, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$. Этот ряд суммируем по Пуассону - Абелю (см. №1), но не суммируем по Чезаро, т.к. $\frac{(-1)^n (n+1)}{n} \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

III. Методы Гёльдера.

Наиболее очевидное обобщение метода Чезаро было предложено Гёльдером. Введём последовательность методов **(H, k)** следующим образом:

$$H_n^{(0)} = A_n, \quad H_n^{(k+1)} = \frac{H_1^{(k)} + \dots + H_n^{(k)}}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Далее, если $H_n^{(k)} \rightarrow A$ при $n \rightarrow +\infty$, то говорим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — **(H, k)** суммируем к сумме A . Заметим, что **(H, 0)** — обычная суммируемость, а **(H, 1)** метод совпадает с методом Чезаро **(C, 1)**.

1.9. Покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ **(H, 2)** — суммируем к $\frac{1}{4}$.

1.10. Просуммируйте по методу Гёльдера ряд: $1 - 3 + 6 - 10 + 15 - \dots$

1.11. Докажите, что если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ **(H, k)**, то $A_n = \overline{O}(n^k)$, при $n \rightarrow \infty$.