

**Определение:** Пусть  $\mathbf{M}$  – непустое множество. Функция  $\rho : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  называется метрикой на  $\mathbf{M}$ , если для  $\forall x, y \in \mathbf{M}$  выполнено:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ , причём  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ , (свойство симметрии);
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  для  $\forall z \in \mathbf{M}$ , (неравенство треугольника).

**Определение:** Множество  $\mathbf{M}$ , снабжённое метрикой  $\rho$ , называется метрическим пространством. Обозначение  $(\mathbf{M}, \rho)$ .

**Определение:** Расстоянием от точки  $x_0 \in \mathbf{M}$  до множества  $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$  называется число  $\rho(x_0, \mathbf{A}) = \inf_{x \in \mathbf{A}} \rho(x_0, x)$ .

**Определение:** Расстоянием между двумя подмножествами  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{M}$  называется число  $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \inf_{x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}} \rho(x, y)$ .

**Определение:** Диаметром множества  $\mathbf{A}$  называется число  $\text{diam } \mathbf{A} = \sup_{x, y \in \mathbf{A}} \rho(x, y)$ .

### 2.1. • (непрерывность метрики)

Пусть  $\mathbf{A}$  – подмножество метрического пространства  $(\mathbf{M}, \rho)$ . Докажите, что функция  $\rho(x, y)$  – непрерывна на  $(\mathbf{M}, \rho)$ .

2.2. Покажите, что функция  $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$  задаёт метрику в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

2.3. • Покажите, что функция  $\rho_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$  при  $0 < p < 1$  и  $n \geq 2$  не является метрикой в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , однако  $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$  будет метрикой на  $\mathbb{R}$ .

2.4. Покажите, что функция  $\rho(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{если } m \neq n; \\ 0, & \text{если } m = n; \end{cases}$  задаёт метрику на пространстве  $\mathbb{N}$ . Проверьте, что данное метрическое пространство полное, и что в нём последовательность замкнутых вложенных шаров  $K_{n, 1+1/2n}$  имеет пустое пересечение.

**2.5.** Докажите, что функция  $\rho(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sup_{[a;b]} |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)|}{2^k (1 + \sup_{[a;b]} |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)|)}$  задаёт метрику

на множестве  $C^\infty[a; b]$ , бесконечно дифференцируемых функций на отрезке  $[a; b]$ .

**2.6.** Пусть  $\rho(f, g) = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}$ ,  $p \geq 1$ . Будет ли данная функция метрикой:

(а) • в пространстве кусочно-непрерывных на отрезке  $[a; b]$  функций?

(б) в пространстве кусочно-непрерывных на отрезке  $[a; b]$  функций с конечным числом точек разрыва и таких, что  $f(a+0) = f(b-0)$  и  $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$  при  $x \in (a; b)$ ?

**Определение:** Линейное пространство  $\mathbf{L}$  называется *евклидовым пространством*, если для  $\forall f, g \in L$  существует отображение  $(f, g) : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ , называемое *скалярным произведением*, которое подчинено аксиомам:

$$1^\circ (f, g) = (g, f), \quad \forall f, g \in \mathbf{L};$$

$$2^\circ (\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h), \quad \forall f, g, h \in \mathbf{L}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$3^\circ (f, f) \geq 0. \text{ Причем } (f, f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

**Определение:** Множество  $\mathbf{X}$  называется *линейным нормированным пространством*, если:

1.  $\mathbf{X}$  является линейным пространством над полем вещественных или комплексных чисел,
2. для  $\forall x \in \mathbf{X}$  определено неотрицательное число  $\|x\|$ , называемое *нормой элемента  $x$* , удовлетворяющее *аксиомам нормы*:

$$(a) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0;$$

$$(б) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

$$(в) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} (\in \mathbb{C}).$$

**Теорема:** Любое евклидово пространство можно сделать нормированным, положив  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$  для  $\forall f$ .

**Определение:** Две нормы  $\|x\|_1$  и  $\|x\|_2$  называются *эквивалентными*, если  $\exists C_1, C_2$  — постоянные, такие что:  $C_1 \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \cdot \|x\|_1$ .

**Определение:** Два элемента  $f$  и  $g$  евклидова пространства называются *ортогональными*, если  $(f, g) = 0$ . Обозначение  $f \perp g$ .

**2.7.** • (тождество параллелограмма)

Пусть  $\mathbf{X}$  – линейное нормированное пространство. Докажите, что на  $\mathbf{X}$  можно ввести скалярное произведение  $(x, y)$ , согласованное с нормой этого пространства (т.е.  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ ) тогда и только тогда, когда для  $\forall x, y \in \mathbf{X}$  выполнено следующее тождество:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**2.8.** (тождество Апполония)

Докажите, что в евклидовом пространстве имеет место тождество:

$$2\|z - x\|^2 + 2\|z - y\|^2 = \|x - y\|^2 + 4\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2.$$

**2.9.** (теорема Пифагора)

Покажите, что в евклидовом пространстве элементы  $x$  и  $y$  ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

**Определение:**  $C[a; b]$  – пространство непрерывных функций  $f(x)$ , заданных на отрезке  $[a; b]$ , с введённой на нём нормой  $\|f\|_C = \max_{[a; b]} |f(x)|$ .

**Определение:**  $l_1$  – пространство последовательностей  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  таких, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  сходится, с введённой на нём нормой  $\|f\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ .

**2.10.** Покажите, что:

(а) в пространстве  $C[0; 1]$  нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства;

(б) • то же самое для пространства  $l_1$ .

**2.11.** Пусть на множестве интегрируемых в отрезке  $[a; b]$  функций введено скалярное произведение:

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt.$$

Назовём полученное пространство  $\mathcal{R}[a; b]$ .

(а) Определите значения  $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ , при которых функции  $f(t) = 1 + \alpha t$ ,  $g(t) = 1 + \beta t$ ,  $t \in [0; 1]$  ортогональны в  $\mathcal{R}[0; 1]$ ?

(б) При каких значениях  $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$  функции  $f(t) = \sin mt$ ,  $g(t) = \cos nt$ ,  $t \in [0; 2\pi]$

ортогональны в  $\mathcal{R}[0; 2\pi]$ ?

(е) • При каких значениях  $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$  функции  $f(t) = \sin mt$ ,  $g(t) = \cos nt$ ,  $t \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

ортогональны в  $\mathcal{R}\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ ?

**2.12.** Рассмотрим пространство функций  $f(x)$ , имеющих на отрезке  $[a; b]$  непрерывные производные до  $k$ -го порядка включительно. Введём в нём две нормы, полагая:

$$\|f\|_1 = \sum_{i=0}^k \max_{[a; b]} |f^{(i)}(x)|, \quad \|f\|_2 = \max_{i=0, k} \left\{ \max_{[a; b]} |f^{(i)}(x)| \right\}.$$

Будут ли эти нормы эквивалентными?

**Определение:** Будем говорить, что функция  $f(x)$  удовлетворяет на отрезке  $[a; b]$  *условию Липшица с показателем  $\alpha$* ,  $0 < \alpha \leq 1$ , если для колебания этой функции выполнено условие:

$$\omega(\delta, f) = \sup_{x_1, x_2 \in [a; b], |x_1 - x_2| < \delta} |f(x_1) - f(x_2)| = \overline{O}(\delta^\alpha).$$

**2.13.** ★ Покажите, что на множестве функций, определенных на отрезке  $[a; b]$  и удовлетворяющих *условию Липшица с показателем  $\alpha$* ,  $0 < \alpha \leq 1$ , можно ввести метрику по формуле:

$$\rho(f; g) = \sup_{[a; b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x_1, x_2 \in [a; b], x_1 \neq x_2} \frac{|f(x_1) - g(x_1) - f(x_2) + g(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}.$$

Полученное пространство называется *пространством Зигмунда-Гёльдера*. Обозначение:  $H^\alpha[a; b]$ .