ряды Фурье листок 3	**Тригонометрические ряды. Общие понятия**	29 апреля 2011 года

Определение: *Тригонометрическим рядом* называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\big), \tag{1}$$

где a_0, a_n и $b_n\in\mathbb{R}$ для $\forall n\in\mathbb{N}$. Эти числа называются *коэффициентами тригонометрического ряда.* Если тригонометрический ряд сходится для всех $x\in\mathbb{R}$, то его сумма является периодической функцией.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$. Рассмотрим тригонометрический ряд (1), где коэффициенты имеют вид:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,cosnx\,dx,\quad n=0,1,2,\ldots;\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\sin nx\,dx,\quad n=1,2,\ldots$$

Этот ряд называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$. В этом случае пишут:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\big).$$

Частичные суммы тригонометрического ряда Фурье обозначаются как:

$$S_n(x;f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}\big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\big).$$

3.1. • Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ монотонно стремится к нулю, $\lambda_n\geqslant 0$ для $\forall n$, и пусть $\delta\in(0;\,2\pi)$. Докажите, что тригонометрические ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\sin nx$ сходятся равномерно на отрезке $[\delta;\,2\pi-\delta]$, и тем самым, суммы этих рядов являются непрерывными функциями на интервале $(0;\,2\pi)$.

Определение: Под *чезаровским средним для тригонометрического ряда Фурье функции* $f(x)$ мы будем понимать выражение:

$$\sigma(x;\,f)\;=\;\frac{S_0(x;\,f)+S_1(x;\,f)+\ldots+S_{n-1}(x;\,f)}{n},$$

где $S_n(x;\,f)-$ частичные суммы тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$.

3.2. • Пусть найдутся $m,\,M\in\mathbb{R}$, такие что $m\leqslant f(x)\leqslant M$, и $f(x)-$ интегрируема на $[0;\,2\pi]$. Докажите, что её чезаровские средние удовлетворяют тем же оценкам:

$$m\leqslant\sigma(x;\,f)\leqslant M,\ \ \text{для}\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

3.3. Пусть квадрат функции $f(x)$ интегрируем на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Докажите равенство:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - S_n(x;f)\big)^2\,dx \;=\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k^2 + b_k^2\big)\right). \qquad (*)$$

<u>**Замечание:**</u> Из равенства Парсеваля: $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\big(a_k^2 + b_k^2\big) \;=\; \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ и тождества $(*)$ следует, что для любой функции, квадрат которой интегрируем на $[-\pi;\pi]$, ряд Фурье этой функции сходится к нему в смысле среднего квадратичного на этом отрезке, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - S_n(x;f)\right)^2\,dx = 0.$$

3.4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;\pi]$ и имеет производную, квадрат которой интегрируем на этом отрезке. Пусть также $\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,dx = 0$. Докажите, что справедливо неравенство:

$$\int\limits_{0}^{\pi}\big(f(x)\big)^2 dx \leqslant \int\limits_{0}^{\pi}\big(f|\prime(x)\big)^2 dx.$$

3.5. $\bullet$ Как следует продолжить, заданную на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ непрерывную функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi;\ \pi)$, чтобы её разложение в ряд Фурье имело вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos{(2n-1)x}, \quad -\pi < x < \pi;$$

3.6. Пусть функция $f(x)$, определённая на $\mathbb{R}$, удовлетворяет условиям: квадрат $f(x)$ интегрируем на $[-\pi;\pi]$ и $f(x+\pi = -f(x))$. Покажите, что данная функция является периодической, и найдите какой особенностью обладают коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\big\{1;\,\sin x;\,\cos x;\,\sin 2x;\,\cos 2x\ldots\sin nx;\,\cos nx;\ldots\big\}$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

3.7. Пусть $f(x)-$ периодическая функция, интегрируемая с квадратом на $[-\pi;\ \pi]$, и a_n, b_n- её коэффициенты Фурье по тригонометрической системе на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Какими особенностями обладают последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, если график $f(x)$ симметричен

(а) относительно оси Oy и точки $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(б) относительно оси Oy и прямой $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

3.8. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\ \pi]$ и тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к функции $g(x)$ для $\forall x \in (-\pi;\ \pi)$. Докажите, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in (-\pi;\ \pi)$.

3.9. • Пусть функция $f(x)$ $2\pi-$периодична на $[-\pi;\,\pi]$, и пусть a_n и b_n- её коэффициенты Фурье по тригонометрической системе на отрезке $[-\pi;\,\pi]$. Докажите, что если $a_n = \overline{\text{o}}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $b_n = \overline{\text{o}}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$, то тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к $f(x)$ равномерно на $(-\pi;\pi)$.

3.10. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi;\,\pi]$. Докажите, что её коэффициенты Фурье $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cosnx\, dx$, и $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\, dx$ стремятся к 0 при $n \to \infty$, если:

(а) • функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\,\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$;

(б) функция $f(x)$ интегрируема на $[-\pi;\,\pi]$.

Замечание: если от функции $f(x)$ дополнительно к $2\pi-$периодичности потребовать и непрерывность её производной, то справедливы оценки:

$$a_n(f) = \overline{\text{o}}\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n(f) = \overline{\text{o}}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

3.11. • ***(обобщённое равенство Парсеваля)***

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[-\pi;\,\pi]$; a_0, a_n, b_n $(n \in \mathbb{N})$ и $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ $(n \in \mathbb{N})-$ коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Докажите, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\alpha_n + b_n\beta_n\big).$$

3.12. Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ монотонно стремится к нулю, $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\sin nx$$

Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[-\pi;\pi]$, то ряды $\dfrac{\lambda_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\sin nx$ являются **рядами Фурье** соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$.

Замечание: отметим, что так определённые функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на множестве $\big\{\mathbb{R}\setminus\{2\pi k\},\ k \in \mathbb{Z}\big\}$.

3.13. $\star$ Пусть $\{a_n\}_1^N$ и $\{b_n\}_1^N$ такие конечные последовательности вещественных чисел, что суммы

$$A(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx \quad \text{и} \quad B(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx$$

неотрицательны на отрезке $[0;\, \pi]$. Докажите, что

$$C(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n\, b_n}{n} \sin nx \geqslant 0 \quad \text{для любого} \ \ x \in [0;\, \pi].$$

3.14. $\star$ Пусть $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$. Докажите, что

$$g(x) \geqslant -\frac{a_1}{2\pi} x \quad \text{при} \ \ x \in (0;\, \pi).$$