

Теорема (разложения):

Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную на интервале $(-\pi; \pi)$, причём все её точки разрыва регулярны, т.е. $f(x) = \frac{1}{2}(f(\xi-0) + f(\xi+0))$, то $f(x)$ на этом интервале может быть представлена рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (*)$$

В случае чётных, или нечётных функций $f(x)$ формулы (*) упрощаются.

4.1. * (почленное интегрирование рядов Фурье)

Пусть интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx).$$

Докажите, что если для произведения этой функции и любой равномерно ограниченной последовательности $\varphi_n(x)$ справедлив предельный переход под знаком интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi_n(x) \, dx,$$

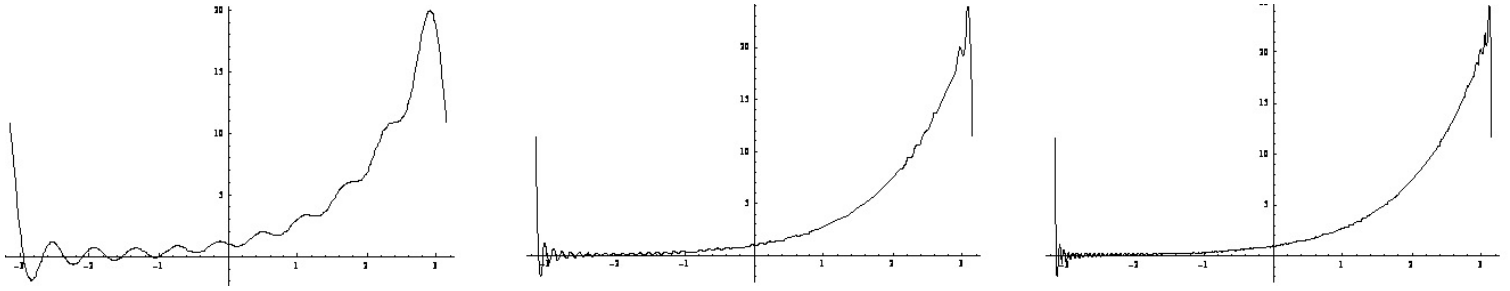
то для любого отрезка $[a; b] \subset [-\pi; \pi]$ справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \frac{a_0(f)}{2} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx) \, dx,$$

т.е. ряд Фурье функции $f(x)$ можно интегрировать почленно.

Замечание: при решении данной задачи воспользуйтесь результатом из №4.9

4.2. • Разложите функцию $f(x) = e^{ax}$ ($a = \text{const}$, $a \neq 0$) в ряд Фурье на интервале $(-\pi; \pi)$.

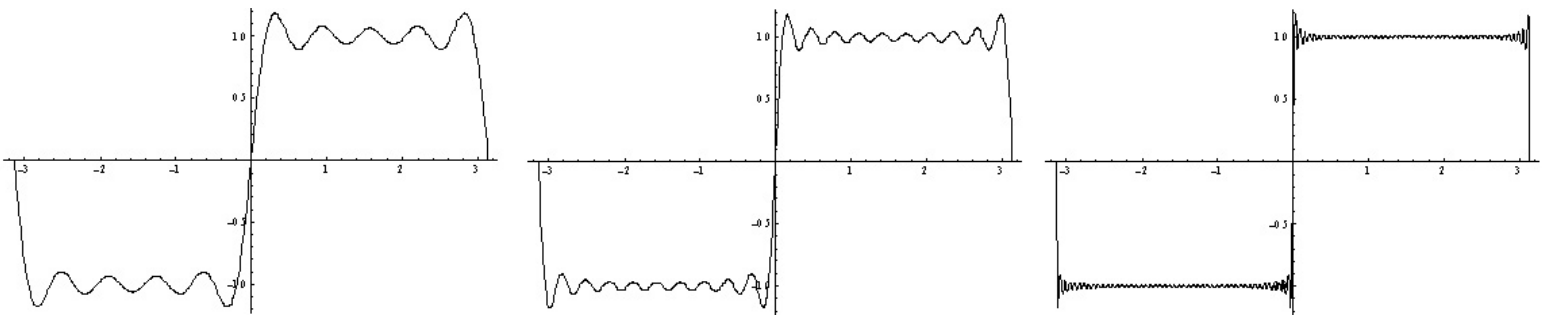


(графики рядов Фурье функции e^x для $n = 10, 50, 100$)

4.3. • Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = \text{sgn } x$, заданную на интервале $(-\pi; \pi)$.

Замечание: положив в полученном разложении $x = \frac{\pi}{2}$, можно вычислить значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$



(графики рядов Фурье для $n = 5, 10, 50$)

4.4. Функцию $f(x) = \sin^4 x$ разложить в ряд Фурье.

4.5. Разложите функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\pi; \pi)$, если:

(а) $f(x) = |x|$;

(б) $f(x) = \cos ax$, (a - не целое);

(в) $f(x) = \sin ax$, (a - не целое);

(z) $f(x) = \operatorname{ch} x$;

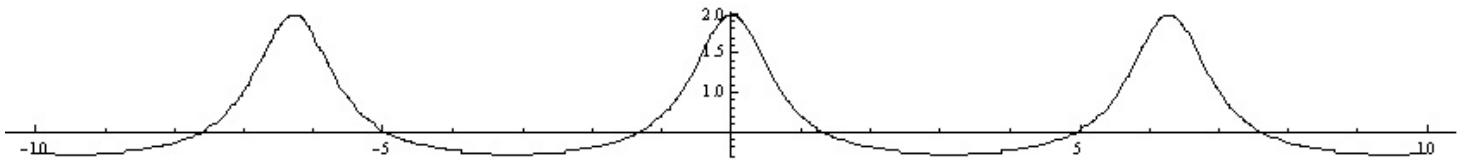
(d) $f(x) = \operatorname{sh} x$;

Замечание: данные разложения можно получить из разложения, полученного в №4.2, используя, что $\operatorname{ch} x$ – чётная, а $\operatorname{sh} x$ – нечётная составляющие функции e^x , но желательно провести вычисление независимо.

(e) $f(x) = x \sin x$.

4.6. • Докажите возможность разложения, и разложите в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}, \quad (|\alpha| < 1).$$



(график функции $f(x) = \sum_{n=1}^{10} (1/2)^n \frac{\sin nx}{\sin x}$)

4.7. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье:

(a) • в интервале $(-\pi; \pi)$ по косинусам кратных дуг;

(б) в интервале $(0; \pi)$ по синусам кратных дуг;

(в) в интервале $(0; 2\pi)$.

Нарисуйте графики функций и сумм рядов Фурье (при $n = 5, 10, 50, 100$) для этих случаев. Пользуясь полученными разложениями, вычислите следующие суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

4.8. • Разложите функцию

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

в ряд Фурье на интервале $(0; 2\pi)$.

4.9. Докажите, что частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ равномерно ограничены, т.е. найдётся число $C > 0$, такое что

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq C, \quad \text{для } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.10. *

(а) Пусть функция $f(x)$ интегрируема с квадратом на $[-\pi; \pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ и

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in (-\pi; \pi)$. Докажите, что тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ допускает почленное интегрирование.

(б) Пусть функция $F(x)$ непрерывно дифференцируемая на $(-\pi; \pi)$ $(m-1)$ раз функция. $F^{(m)}(x)$ интегрируема с квадратом на $(-\pi; \pi)$, и

$$F^{(k)}(-\pi) = F^{(k)}(\pi), \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Докажите, что её коэффициенты тригонометрического ряда Фурье имеют порядок роста $\overline{O}\left(\frac{1}{n^m}\right)$ при $n \rightarrow \infty$.