Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики

Отделение прикладной математики и информатики

Кафедра высшей математики

ряды Фурье листок 5	**Разложение функций в ряд Фурье на интервале** $(-l; l)$	20 мая 2011 года

Определение: Система функций

$$\left\{\varphi_i^l(x)\right\} = \left\{\frac{1}{2};\ \sin\frac{\pi x}{l};\ \sin\frac{\pi x}{l};\ldots;\sin\frac{\pi kx}{l};\ \sin\frac{\pi kx}{l};\ldots\right\},\ \ x \in (-l;\ l),\ k \in \mathbb{N}$$

называется *основной тригонометрической системой*. Эта система ортогональна на $(-l;\ l)$.

Определение: Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $(-l;\ l)$. Числа

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

называются *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\left\{\varphi_i^l(x)\right\}$.

Определение: Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)$$

называется *рядом Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\left\{\varphi_i^l(x)\right\}$.

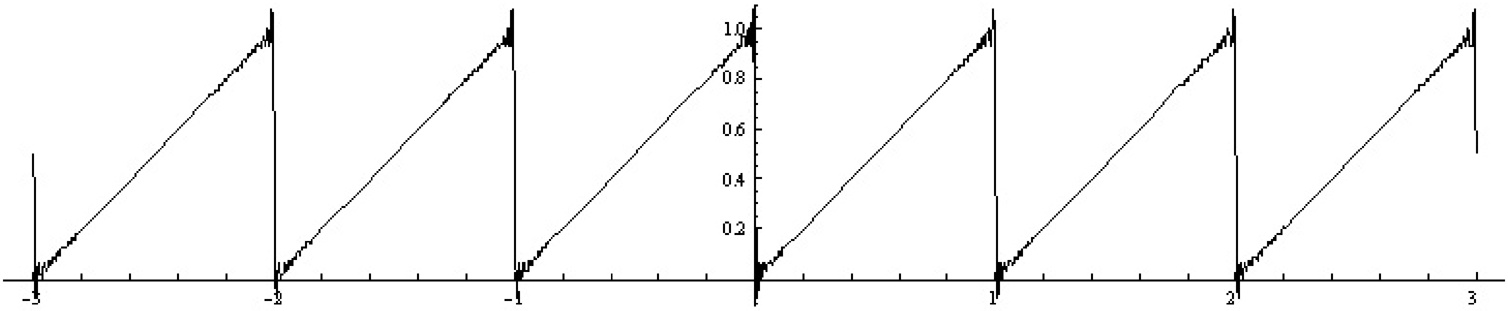
5.1. Разложите в ряд Фурье на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ следующие периодические функции:

(а) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$;

(б) $f(x) = \arcsin(\cos x)$;

(в) • $f(x) = x - [x]$, где $[x]$ – целая часть числа x;

(г) $f(x) = \big(x\big)$, где $\big(x\big)$ – расстояние от x до ближайшего целого числа.



(*график ряда Фурье функции* $f(x) = x - [x]$ *для* $n = 50$)

5.2. • Пусть A− некоторая постоянная. Разложите в ряд Фурье на всей числовой прямой функцию

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{если } 0 < x < l; \\ 0, & \text{если } l < x < 2l, \end{cases}$$

продолженную на $\mathbb{R}$ $2l$− периодически.

5.3. • Найдите разложение в ряд Фурье на интервале $(0; 3/2)$ функции $f(x) = \big(x\big)$, где $\big(x\big)$− расстояние от x до ближайшего целого числа.

<u>**Замечание:**</u> сравните данное разложение с разложением из номера 5.1,*г*)

5.4.

(а) • Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислите коэффициенты Фурье $\overline{a}_n$, $\overline{b}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *"смещенной" функции*

$$f(x + h), \quad (h = \text{const});$$

(б) • Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислите коэффициенты Фурье A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *функции Стеклова*:

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(\xi)\, d\xi;$$

(в) Пусть $f(x)$− непрерывная функция с периодом 2π и a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ её коэффициенты Фурье. Определите коэффициенты Фурье $\overline{a}_n$, $\overline{b}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *"свёрнутой" функции:*

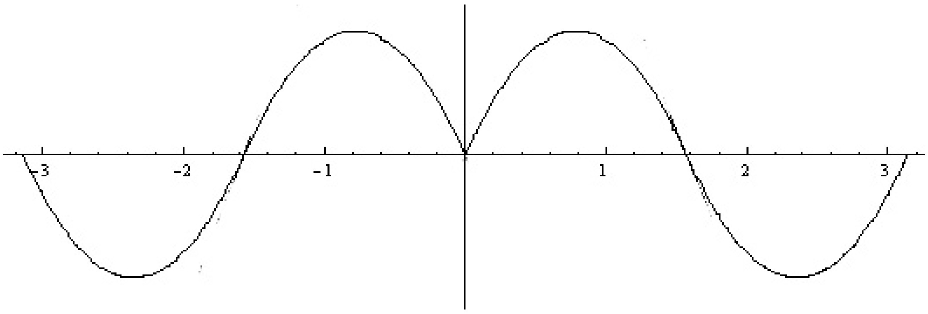
$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, f(x + t)\, dt.$$

Пользуясь полученным результатом, вывести *равенство Парсеваля в тригонометрической форме.*

5.5. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале $(a;\, a + 2l)$.

5.6. Функцию $f(x) = x\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ разложите в интервале $(0;\ \pi/2)$:

(а) • по косинусам нечётных дуг;



(б) по синусам нечётных дуг.

5.7. Найдите разложение в тригонометрический ряд Фурье функции:

(а) • $f(x) = e^{ax}$, $a = \text{const}$, $a \neq 0$ на интервале $(0; 1)$;

(б) $f(x) = x\cos x$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(в) $f(x) = x\sin 2x$ на $\left(-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$;

(г) $f(x) = (l^2 - x^2)^2$ на $(-l; l)$;

(д) $f(x) = x\,(l^2 - x^2)$ на $(-l; l)$.