Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики
Отделение прикладной математики и информатики
Кафедра высшей математики

ряды Фурье листок 7	**Разложение в ряд Фурье по другим системам функций**	3 июня 2011 года

Определение: Система $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots\}$ элементов евклидова пространства $\mathbf{H}$ называется ортонормальной, если $(\mathbf{e}_m,\, \mathbf{e}_n) = \delta_{mn}$.

Определение: Бесконечная система элементов линейного пространства называется *линейно независимой*, если любая конечная подсистема этой системы линейно независима.

Любую счётную линейно независимую систему $\mathbf{h}_1,\, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n \ldots$ можно преобразовать в ортонормированную с помощью *процесса ортогонализации Шмидта:*

Полагаем $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{h}_1}{\|\mathbf{h}_1\|}$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{h}_2 - (\mathbf{h}_2,\, \mathbf{e}_1)\, \mathbf{e}_1$. Тогда $\mathbf{g}_2 \perp \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{g}_2 \neq 0$, в силу линейно независимости $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$. Берём $\mathbf{e}_2 = \dfrac{\mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_2\|}$. Далее, пусть $\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ уже построены. Возьмём $\mathbf{g}_n = \mathbf{h}_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} (\mathbf{h}_n,\, \mathbf{e}_i)\, \mathbf{e}_i$. Тогда $\mathbf{g}_n \neq 0$ и $\mathbf{g}_n$ ортогонален $\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$. Полагаем $\mathbf{e}_n = \dfrac{\mathbf{g}_n}{\|\mathbf{g}_n\|}$.

Определение: Функция $h(x)$ называется *весовой функцией на конечном интервале* $(a;\, b)$, если на этом интервале она неотрицательна, интегрируемая и её интеграл положителен, т.е. если $h(x) \geqslant 0$ и $0 < \int\limits_a^b h(x)\, dx < \infty$. Если же интервал $(a;\, b)$ бесконечен, то, кроме того, должны абсолютно сходиться интегралы

$$h_n = \int\limits_a^b x^n\, h(x)\, dx, \quad n = 0,\, 1,\, 2 \ldots$$

Пусть задана последовательность многочленов:

$$P_0(x),\ P_2(x), \ldots, P_n(x) \ldots,$$

в которой индекс означает степень соответствующего многочлена. Данная *система многочленов* называется *ортонормированной, с весовой функцией* $h(x)$, если

$$\int\limits_a^b h(x) \cdot P_n(x) \cdot P_m(x)\, dx \;=\; \delta_{mn}.$$

Наиболее важное значение имеют следующие *системы классических ортогональных многочленов:*

1. *Многочлены Чебышёва первого рода* $\{\mathbf{T}_n(x)\} = \left\{ \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \arccos x\right) \right\}$ ортогональны на интервале $(-1;\, 1)$ с весовой функцией $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т.е.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathbf{T}_m(x)\, \mathbf{T}_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2^{2n-1}} \cdot \delta_{mn}.$$

2. *Многочлены Лежандра* $\{\boldsymbol{P}_n(x)\} = \left\{\frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n\,(x^2-1)^n}{dx^n}\right\}$ ортогональны на отрезке $[-1;\,1]$, т.е.

$$\int\limits_{-1}^{1} \mathbf{P}_m(x)\,\mathbf{P}_n(x)\,dx \;=\; \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

3. *Многочлены Лагерра* $\{\mathbf{L}_n(x)\} = \left\{\frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n\;(x^n\,e^{-x})}{dx^n}\right\}$ ортогональны на луче $(0;\,+\infty)$ с весовой функцией $h(x) \,=\, e^{-x}$, т.е.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\cdot\mathbf{L}_m(x)\cdot\mathbf{L}_n(x)\,dx \;=\; \delta_{mn}.$$

4. *Многочлены Эрмита* $\{\mathbf{H}_n(x)\} = \left\{\frac{e^{x^2/2}}{n!}\,\frac{d^n\,(x^n e^{-x})}{dx^n}\right\}$ ортогональны на луче $(0;\,+\infty)$ с весовой функцией $h(x) \,=\, e^{-x^2/2}$, т.е.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cdot\mathbf{H}_m(x)\cdot\mathbf{H}_n(x)\,dx \;=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\,\delta_{mn}.$$

7.1.

(а) • Рассмотрим линейно независимую систему степеней $1,\ t,\ t^2, \ldots$. Введём в пространстве этих функций норму как:

$$\|f(t)\|^2 \;=\; (f,\,f) \;=\; \int\limits_{-1}^{1} f^2(t)\,dt.$$

Ортогонализация этой системы процессом Шмидта по введённой норме даёт *многочлены Лежандра* $\boldsymbol{P}_n(t)$. Найдите $\mathbf{P}_n(t)$ при $n = 1, 2, 3$;

(б) ⋆ Вычислите норму многочлена Лежандра $\mathbf{P}_n(x)$;

Замечание: проверьте полученные результаты с помощью формулы, приведённой выше, производя деление на соответствующие нормы.

Замечание: способ нахождения многочленов Лежандра, описанный в №7.1 а) иногда берется за их определение.

(в) ⋆ Докажите, что система многочленов Лежандра $\mathbf{P}_n(x)$ полна на $[-1;\,1]$;

7.2.

(а) • Обозначим через $\mathbf{A}_n$ множество всех многочленов $\mathbf{M}_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом 1. Докажите, что

$$\min_{\mathbf{A}_n} \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{M}_n^2(x)\,dx \;=\; \frac{2^{2n}\,(n!)^4}{\big[(2n)!\big]^2} \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{P}_n^2(x)\,dx,$$

где $\mathbf{P}_n(x)$– некоторый многочлен;

(б) Обозначим через $\mathbf{B}_n$ множество всех многочленов $\mathbf{M}_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} \mathbf{M}_n^2(x)\,dx \leqslant 1$. Докажите, что для всех многочленов $\mathbf{M}_n(x) \in \mathbf{B}_n$ выполнено неравенство:

$$\mathbf{M}_0^2(0) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}_k^2(0).$$

7.3. Разложите в ряд Фурье по многочленам Чебышёва следующие функции:

(а) • $f(x) = \ln(1+x), \quad -1 < x < 1;$

(б) $f(x) = \arcsin x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1;$

(в) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1;$

Замечание: предварительно разложите в ряд Фурье чётную функцию $|\sin\theta|,\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi.$

(г) • $f(x) = x^3, \quad -1 < x < 1;$

(д) ⋆ $f(x) = e^{ax}, \quad a \in \mathbb{R}.$

7.4. Разложите в ряд Фурье по полиномам Лежандра функции:

(а) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -1 < x < 0, \\ 1, & \text{если} \quad 0 < x < 1; \end{cases}$

(б) • $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1;$

(в) $f(x) = \arcsin x, \quad -1 < x < 1.$

7.5. Разложите в ряд Фурье по полиномам Лагерра функции:

(а) • $f(x) = e^{-ax}, \quad a \in \mathbb{R},\ x > 0;$

(б) $f(x) = x^n, \quad n \geqslant 1,\ x > 0.$

7.6. Разложите в ряд Фурье по полиномам Эрмита функцию $f(x) = e^{-ax}, \quad a \in \mathbb{R},\ x > 0.$