Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики
Отделение прикладной математики и информатики
Кафедра высшей математики

ряды Фурье листок 8	**Интеграл Фурье и преобразование Фурье**	10 июня 2011 года

Теорема Если выполнены условия:

1. $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
2. $f(x)$ и $f'(x)$– кусочно-непрерывны на любом конечном промежутке;
3. $f(x)$– абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$,

то во всех своих точках непрерывности она допускает представление в форме ряда Фурье:

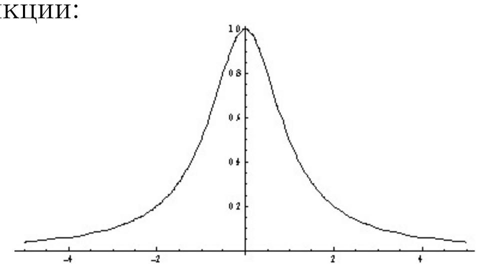
$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \big[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\big]\, d\lambda, \quad \text{где} \tag{$*$}$$

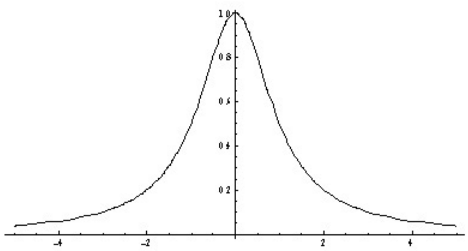
$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi \tag{$**$}$$

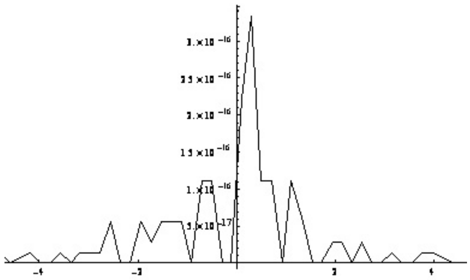
В точках разрыва функции $f(x)$ левая часть формулы $(*)$ заменяется на $\frac{1}{2}\big[f(x+0)+f(x-0)\big]$.

Замечание: в случае чётной или нечётной функции $f(x)$ формулы $(*)$ и $(**)$ упрощаются.

8.1. Представьте интегралом Фурье следующие функции:







(а) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b), \quad (b > a)$;

(б) $\bullet$ $f(x) = \dfrac{1}{a^2+x^2}, \quad (a > 0)$;

(в) $f(x) = \dfrac{x}{a^2+x^2}, \quad (a > 0)$;

(г) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad |x| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \pi; \end{cases}$

(д) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если} \quad |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

(е) $f(x) = e^{-\alpha|x|}, \qquad \alpha > 0.$

Определение: *Преобразование Фурье интегрируемой функции* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является интегральным преобразованием и определяется следующей формулой:

$$F[f]\,(\xi) \;=\; \widehat{f}(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

Определение: *Обратное преобразование Фурье* задаётся *формулой обращения*

$$f(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Замечание: в данном определении несобственные интегралы понимаются в смысле **главного значения**.

Замечание: разные источники могут давать определения, отличающиеся от приведённого, выбором коэффициента перед интегралом, а также знаком "минус" в показателе экспоненты. Все свойства в этом случае будут аналогичны, хотя вид некоторых формул может измениться.

8.2. Найдите прямое преобразование Фурье следующих функций:

(а) $f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\sin at}{t}, & \text{если} \quad t \neq 0, \\ a, & \text{если} \quad t = 0, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R};$

(б) • $f(x) \;=\; e^{-a|x|}, \qquad a > 0;$

(в) $f(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > a, \end{cases} \qquad a > 0;$

(г) • $f(x) \;=\; x\, e^{-x^2};$

(д) • $f(x) \;=\; e^{-\alpha^2 x^2}, \qquad \alpha \neq 0;$

(е) $f(x) \;=\; x\, e^{-\alpha|x|}, \qquad \alpha > 0.$

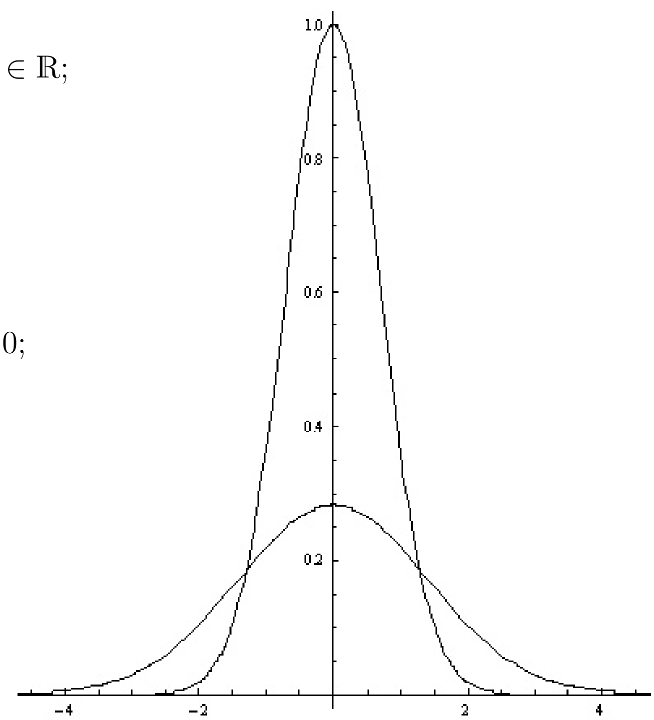


График функций $f(x) \;=\; e^{-x^2}$ *и* $\widehat{f}(\xi)$

8.3. Докажите следующие *элементарные свойства преобразования Фурье:*

(а) $F\big[f(ax)\big]\,(\xi) \;=\; \dfrac{1}{a} F\big[f(x)\big]\,(\xi/a)\,,$ ***(теорема подобия)***;

(б) $F\big[f(x)\,e^{i\alpha x}\big]\,(\xi) \;=\; F\big[f(x)\big]\,(\xi-\alpha)\,,$ ***(теорема смещения)***;

(в) $F\big[f(x-b)\big]\,(\xi) \;=\; F\big[f(x)\big]\,(\xi)\;e^{-i\xi b},$ ***(теорема запаздывания)***.

8.4. Найдите обратные преобразования Фурье $\left(f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx\right)$ следующих функций:

(а) • $f(x) \;=\; e^{-|x|}\,\cos\omega x;$

(б) $f(x) \;=\; (2x+1)\,e^{-|x|}.$

Определение: Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[0;\,+\infty)$. Тогда:

- функция $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\cos\xi x\,dx$ называется *косинус-преобразованием Фурье функции* $f(x)$. Обозначение: $F_c\big[f\big]\,(\xi)$,
- функция $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\sin\xi x\,dx$ называется *синус-преобразованием Фурье функции* $f(x)$. Обозначение: $F_s\big[f\big]\,(\xi)$,

Замечание: аналогично вводятся обратные косинус- и синус- преобразования Фурье.

Определение: Будем говорить, что *в точке x_0 выполнены условия Дини*, если существует $h > 0$, такое что несобственные интегралы:

$$\int\limits_0^h \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}\,du \quad \text{и} \quad \int\limits_0^h \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{u}\,du \quad \text{сходятся.}$$

Теорема Пусть функция $f(x)$ интегрируема и непрерывна на $[0;\,+\infty)$ и для любой точки $x_0 \in [0;\,+\infty)$ выполнены условия Дини. Тогда имеет место *формула обращения для косинус-преобразования Фурье:*

$$f(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_c\big[f\big](\lambda)\,\cos\lambda x\,d\lambda, \qquad x \in [0;\,+\infty),$$

и если $f(0) = 0$, то имеет место и *формула обращения для синус-преобразования Фурье:*

$$f(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_s\big[f\big](\lambda)\,\sin\lambda x\,d\lambda, \qquad x \in [0;\,+\infty).$$

Если $f(0) \neq 0$, то формула обращения для синус-преобразования Фурье верна для $x \;\in\; (0;+\infty)$.

8.5. Найдите синус-преобразование Фурье следующих функций:

(а) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2\pi x} - 1}, \qquad x > 0;$

(б) $f(x) = e^{-\beta x}, \qquad \beta > 0,\ x > 0;$

(в) • $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2 + b^2)}, \qquad b > 0,\ x > 0;$

(г) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2 + b^2)^2}, \qquad b > 0,\ x > 0.$

8.6. Найдите косинус-преобразование Фурье функций:

(а) $f(x) = e^{-\beta x}, \qquad \beta > 0,\ x > 0;$

(б) • $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right).$

8.7. Покажите, что функция $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, продолженная чётно (нечётно) на полупрямую $x < 0$, является одновременно своим собственным косинус- (синус-) преобразованием, с точностью до постоянной.

8.8. ⋆ Определим *полином* $\boldsymbol{H}_n(x)$ следующей формулой: $\mathbf{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}\big(e^{-x^2}\big).$ Положим $\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \dfrac{d^n}{dx^n}\big(e^{-x^2}\big)$

(а) Докажите, что функция $\varphi_n(x)$ служит решением обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\varphi_n''(x) - x^2 \varphi_n(x) = -(2n+1)\,\varphi_n(x) \qquad (*)$$

Получите дифференциальное уравнение для определения функций $\mathbf{H}_n(x)$.

(б) Найдите $F\big[\varphi_n(x)\big](\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\, \varphi_n(x)\, dx.$