ГУ ВШЭ, 2011−12
3 курс, Эконометрика,
П.К.Катышев
23.01.2012

Домашняя работа 1
Решение

Задача 1. Коробка из 12 теннисных мячей содержит два дефектных. Процедура контроля качества такова: из коробки выбираются два мяча и, если хотя бы один из них дефектный, то вся коробка забраковывается. Какова вероятность того, что коробка будет забракована?
Решение. Найдем дополнительную вероятность p = P(оба мяча нормальные): $p = \frac{C_{10}^2}{C_{12}^2} = \frac{45}{66} = \frac{15}{22}$. P(хотя бы один мяч дефектный) = 7/22.

Задача 3. Из карточек разрезной азбуки составлено слово «СТАТИСТИКА». Затем из этих 10 карточек по схеме случайного неупорядоченного выбора без возвращения отобрано 5 карточек. Найти вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слово «ТАКСИ».
Решение. В этой задаче 10 букв в слове статистика – ящики, 5 выбираемых букв – шары. Шары различны, т.к. имеет значение порядок выбираемых букв, выбор – неупорядочен, следовательно, всего вариантов выбора 5 карточек: $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\cdot 5!}$ =252. Различных способов собрать слово «ТАКСИ» из слова «СТАТИСТИКА»: 3*2*1*2*2=24 (3 буквы «Т», 2 буквы «А» и т.д.) Искомая вероятность: p = 24/252 = 2/21.

Задача 4. На полке в произвольном порядке расставлены n книг, среди которых есть хорошо известный всем математикам трёхтомник Г.М.Фихтенгольца «Курс математического анализа». Найти вероятность того, что все три тома трехтомника

I) оказались рядом;
II) расположены рядом в порядке возрастания номеров томов (слева направо или справа налево);
III) расположены в порядке возрастания номеров томов слева направо (не обязательно рядом).

Решение. I) Можно решать эту задачу двумя разными способами, получая, тем не менее, одинаковый результат.
1-й способ. Количество различных размещений трех томов Фихтенгольца (с учетом порядка) равно $n(n-1)(n-2)$. Число благоприятствующих исходов равно $6(n-2)$ ($n-2$ места для первого по порядку тома и число перестановок трех томов). Искомая вероятность

$$P = \frac{6(n-2)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{6}{n(n-1)}.$$

2-й способ. Всего различных перестановок книг $n!$. Три тома Фихтенгольца можно разместить, как и в первом решении, $6(n-2)$ способами, а для остальных книг остается $(n-3)!$ перестановок. Искомая вероятность

$$P = \frac{6(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{6}{n(n-1)}.$$

II) Из шести возможных перестановок трех томов только две удовлетворяют условию (см. п.I)). Искомая вероятность равна

$$P = \frac{2}{n(n-1)}.$$

III) *1-й способ.* Из *n* мест можно выбрать три места C_m^3 различными способами, куда тома Фихтенгольца ставятся единственным способом. Оставшиеся $n-3$ книги можно разместить по оставшимся местам $(n-3)!$ различными способами. Искомая вероятность есть

$$P = \frac{C_n^3 \cdot (n-3)!}{n!} = \frac{1}{6}.$$

2-й способ. Любая расстановка трехтомника получается из расстановки, в которой тома расположены в порядке возрастания слева направо, некоторой перестановкой. Таких перестановок $6 = 3!$. Отсюда искомая вероятность

$$P = \frac{1}{6}$$

Задача 5 (задача кавалера де Мере). Что вероятнее: при бросании четырех игральных костей хотя бы на одной получить единицу или при 24 бросаниях двух костей хотя бы раз получить две единицы?

Решение. Вероятность при бросании четырёх костей получить хотя бы одну единицу:

$$P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = 1 - 0.4822 > 0.5$$

Вероятность при бросании двух костей получить две единицы («яган»):

$$P_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Вероятность ни разу не получить «яган» при 24 бросках:

$$P_3 = \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24} \approx 0.5085$$

Вероятность получить хотя бы один «яган» при 24 бросках:

$$P_4 = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24} \approx 0.4915 < 0.5$$

Первое более вероятно.

Задача 6.* Из множества чисел $\{-n, -n+1, ..., -1, 0, 1, ..., n\}$ случайным образом с возвращением выбираются два числа *x* и *y*. Пусть $p_n = P\{x^2 + y^2 \le n^2\}$. Найти $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Решение. *Нестрогое рассуждение.* Множество всевозможных пар (x, y) − это множество целочисленных точек, расположенных в квадрате на координатной плоскости с центром в начале координат и стороной $2n$. Множество точек, для которых $x^2 + y^2 \le n^2$, лежит в круге с центром в начале координат и радиуса *n.* Из соображений равномерности расположения целочисленных точек, число точек, находящихся внутри какой-то плоской фигуры, пропорционально площади этой фигуры. Поэтому $p_n \approx \frac{\pi n^2}{4n^2}$, и равенство тем точнее, чем больше *n.* Поэтому $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{\pi}{4}$

Строгое рассуждение. Обозначим через R_n число целочисленных точек, для которых $x^2 + y^2 \le n^2$. Далее, для каждого натурального *n* и целого $0 \le x \le n$ обозначим через $C(x,n)$ количество целых чисел *y*, таких что $0 \le y \le \sqrt{n^2 - x^2}$. Нетрудно понять, что

$$\sqrt{n^2 - x^2} \le C(x,n) \le \sqrt{n^2 - x^2} + 1 \qquad (1)$$

Имеем $R_n = 4\sum_{x=0}^{n} C(x,n) - 4n - 3$ (сумма $\sum_{x=0}^{n} C(x,n)$ равна числу целочисленных точек в первой четверти круга $x^2 + y^2 \le n^2$, *включая границу* $x = 0$ и $y = 0$, поэтому для точного равенства приходится исключать повторы). Поскольку все пары (x, y) равновероятны, то. $p_n = \frac{R_n}{(2n+1)^2}$. Учитывая (1), получаем:

$$\frac{4}{(2n+1)^2}\sum_{x=0}^{n}\sqrt{n^2 - x^2} - \frac{4n}{(2n+1)^2} - \frac{3}{(2n+1)^2} \le p_n \le$$
$$\frac{4}{(2n+1)^2}\sum_{x=0}^{n}\sqrt{n^2 - x^2} - \frac{4n}{(2n+1)^2} - \frac{3}{(2n+1)^2} + \frac{4(n+1)}{(2n+1)^2}$$

Отсюда легко следует, что при $n \to \infty$ вероятность p_n ведет себя как величина $S_n = \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{n}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2}$, которая является интегральной суммой для функции $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ на отрезке [0, 1]. Поэтому $\lim_{n\to\infty} p_n = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Задача 7. У человека в кармане *n* ключей, из которых только один открывает дверь. Человек случайным образом последовательно без возвращения вынимает по одному ключу из кармана и пробует открыть дверь. Чему равна вероятность того, что подходящий ключ будет первым, вторым, последним?

Решение. Будем опираться на следующее утверждение, которое называется формулой умножения вероятностей:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Оно легко доказывается по индукции, исходя из определения условной вероятности.
Введем события:

$$A_i = \{i\text{-я попытка неудачна}\},\ i = 1,\ldots,n-1.$$

Ясно, что подходящий ключ будет *i*-м по счету, если осуществляется событие

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{i-1} \cap \overline{A}_i$$

Из очевидных комбинаторных соображений имеем:

$$P(A_1) = \frac{n-1}{n},\ P(\overline{A}_1) = \frac{1}{n},\ P(A_2 \mid A_1) = \frac{n-2}{n-1},\ldots, P(A_k \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}) = \frac{n-k}{n-k+1},$$
$$P(\overline{A}_i \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{i-1}) = \frac{1}{n-i+1}.$$

Из формулы умножения вероятностей получаем, что искомые вероятности одинаковы и равны $\frac{1}{n}$.