

Домашняя работа 2  
Решение

**Задача 1.** Из совокупности всех подмножеств множества  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  по схеме выбора с возвращением выбираются два множества  $A_1, A_2$ . Найти вероятность того, что  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

**Решение.** Элементарный исход такого выбора можно представить в виде

$\omega = ((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_N, \beta_N))$ , где  $\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \notin A_1, \\ 1, & \text{если } i \in A_1, \end{cases} i = 1, \dots, N$ . Аналогично

определяются числа  $\beta_i$  для множества  $A_2$ . Все исходы равновероятны, и  $|\Omega| = 4^N$ .

Очевидно, что  $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Leftrightarrow \alpha_i + \beta_i \leq 1, i = 1, \dots, N$ . Ясно, что таких исходов  $\omega$  ровно  $3^N$ .

Искомая вероятность есть  $p_N = \left(\frac{3}{4}\right)^N$ . Интересно отметить, что  $p_N \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , что отнюдь не очевидно.

**Задача 2.** Экзамен формата *Multiple Choice* (множественный выбор) состоит из 12 вопросов, каждый из которых имеет 5 возможных ответов. Для сдачи экзамена необходимо правильно ответить, по крайней мере, на 8 вопросов из 12. Какова вероятность этого, если:

- (a) Вы идете на экзамен без каких-либо знаний, полагаясь на чистое отгадывание?
- (b) Вы занимались достаточно для того, чтобы исключить три варианта в каждом вопросе. Таким образом, Вам остается отгадывать из двух оставшихся.
- (c) Вы занимались достаточно для того, чтобы знать правильные ответы на 2 вопроса. Для остальных десяти Вы полагаетесь на чистое отгадывание.

**Решение**

- (a) В данном случае разыгрывается биномиальная случайная величина с вероятностью успеха  $1/5$ , поскольку все испытания независимы, и вероятность отгадать правильный ответ равна  $1/5$ . Искомое событие имеет вероятность

$P(\text{из 12 ответов хотя бы 8 правильные}) = P(\xi \geq 8)$ , где  $\xi \sim Bi(12, 0.2)$ . Отсюда получаем, что

$$P(\xi \geq 8) = P(\xi = 8) + P(\xi = 9) + \dots + P(\xi = 12) = C_{12}^8 (0.2)^8 (0.8)^4 + C_{12}^9 (0.2)^9 (0.8)^3 + C_{12}^{10} (0.2)^{10} (0.8)^2 + C_{12}^{11} (0.2)^{11} (0.8)^1 + C_{12}^{12} (0.2)^{12} (0.8)^0 = 0.00058124288$$

- (b) Аналогично, разыгрывается биномиальная случайная величина с  $n=12$  и вероятностями успеха в отдельном испытании  $1/2$ . Получаем, что

$$P(\xi \geq 8) = P(\xi = 8) + P(\xi = 9) + \dots + P(\xi = 12) = C_{12}^8 (0.5)^{12} + C_{12}^9 (0.5)^{12} + C_{12}^{10} (0.5)^{12} (0.8)^2 + C_{12}^{11} (0.5)^{12} + C_{12}^{12} (0.5)^{12} = 0.12085$$

- (c) В данном случае получаем биномиальную величину с  $n=10$  и вероятностями успеха  $1/5$ . Получаем, что

$$P(\xi \geq 6) = P(\xi = 6) + P(\xi = 7) + \dots + P(\xi = 10) = C_{10}^6 (0.2)^6 (0.8)^4 + C_{10}^7 (0.2)^7 (0.8)^3 + C_{10}^8 (0.2)^8 (0.8)^2 + C_{10}^9 (0.2)^9 (0.8)^1 + C_{10}^{10} (0.2)^{10} (0.8)^0 = 0.0063693824$$

- (d) Выводы : ученье – свет, а неученье – тьма; лучше знать довольно много обо всем, чем все о достаточно немногом.

**Задача 3.** Маленький самолет потерпел аварию. Известно, что упасть он мог либо в горах, либо в степи, либо в море. Был организован его поиск. При этом известна следующая информация:

Область падения	Априорная вероятность падения в область	Вероятность необнаружения самолета в процессе поиска
Горы	0.5	0.3
Степь	0.3	0.2
Море	0.2	0.9

- 1) Поиск самолета начался в горах и был безуспешным. Чему равна вероятность того, что самолет, тем не менее, упал в горах?  
 2) Поиск продолжился в двух других областях, но самолет обнаружен не был. Чему теперь равна вероятность того, что самолет упал в горах?

**Решение.** Обозначим события:

$$H_1 = \{\text{самолет упал в горах}\};$$

$$H_2 = \{\text{самолет упал в степи}\};$$

$$H_3 = \{\text{самолет упал в море}\};$$

$$A = \{\text{самолет не обнаружен при поиске в горах}\};$$

$$B = \{\text{самолет не обнаружен при глобальном поиске}\}.$$

- 1) Очевидно, что события  $\{H_k, k = 1, 2, 3\}$  образуют полную группу. Согласно условию,  $P(A | H_1) = 0.3$ , и ясно, что  $P(A | H_2) = P(A | H_3) = 1$ .

По формуле Байеса:

$$P(H_1 | A) = \frac{P(A | H_1) \cdot P(H_1)}{\sum_{k=1}^3 P(A | H_k) \cdot P(H_k)} = \frac{0.3 \cdot 0.5}{0.3 \cdot 0.5 + 0.3 + 0.2} = \frac{3}{13} \approx 0.230.$$

- 2) Аналогично,

$$P(H_1 | B) = \frac{P(B | H_1) \cdot P(H_1)}{\sum_{k=1}^3 P(B | H_k) \cdot P(H_k)} = \frac{0.3 \cdot 0.5}{0.3 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.2} = \frac{5}{13} \approx 0.385.$$

**Задача 4** Число проведенных опытов  $X$  случайно и имеет распределение Пуассона:

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Каждый опыт может быть успешным с вероятностью  $p$  и

неуспешным с вероятностью  $1-p$  (независимо от исходов других опытов). Найти распределение числа успешных опытов.

**Решение.** Обозначим  $S$  число успешных опытов. Тогда по формуле полной вероятности получаем:

$$P(S = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(S = k | X = n) P(X = n), \quad k = 0, 1, \dots$$

Имеем

$$P(S = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(S = k | X = n) P(X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{n-k} \lambda^n}{(n-k)!}$$

$= (m = n - k) = \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^m}{m!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$  ( $q = 1 - p$ ), т.е. число успешных опытов имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda p$ .

**Задача 5.** Подбрасываются два игральных кубика. Найдите средние значения максимума и минимума выпавших очков.

**Решение.** Обозначим  $X_i$  – количество очков, выпавших на  $i$ -м кубике,  $i = 1, 2$ . Тогда случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы:

$$\Pr(X_1 = k, X_2 = n) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \Pr(X_1 = k) \cdot \Pr(X_2 = n).$$

Обозначим  $M = \max\{X_1, X_2\}$ ,  $m = \min\{X_1, X_2\}$ , и пусть  $1 \leq k \leq 6$ .

Имеем  $\Pr(M \leq k) = \Pr(X_1 \leq k, X_2 \leq k) = \frac{k^2}{36}$ . Тогда при  $2 \leq k \leq 6$  получаем

$$\Pr(M = k) = \Pr(M \leq k) - \Pr(M \leq k - 1) = \frac{2k - 1}{36}.$$

При  $k = 1$  очевидно, что  $\Pr(M = 1) = \frac{1}{36} = \frac{2k - 1}{36}$ .

Таким образом,

$$E(M) = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^6 k(2k - 1) = \frac{161}{36} \approx 4.47.$$

Аналогично,

$$\Pr(m \geq k) = \Pr(X_1 \geq k) \cdot \Pr(X_2 \geq k) = \frac{(7 - k)^2}{36}$$

и

$$E(m) = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^6 k(13 - 2k) = \frac{91}{36} \approx 2.53.$$

**Задача 6.** Случайная величина  $X$  принимает значения в множестве натуральных чисел  $N = \{1, 2, \dots\}$ . Докажите, что

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(X \geq i)$$

**Решение.**

$$\text{Имеем } E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) =$$

$$P(X = 1) +$$

$$P(X = 2) + P(X = 2) +$$

$$P(X = 3) + P(X = 3) + P(X = 3) +$$

...

$$P(X = k) + P(X = k) + P(X = k) + \dots + P(X = k)$$

...

= (суммируем по столбцам, это можно делать, поскольку ряд с неотрицательными

членами и сходится)  $= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$ .

**Задача 7.** Пусть  $X_1, X_2$  – независимые случайные величины, имеющие геометрическое распределение:  $P(X_i = k) = q_i^{k-1} p_i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $p_i + q_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ .

(а) Докажите, что случайная величина  $Y = \min(X_1, X_2)$  также имеет геометрическое распределение.

(б) Найдите  $E(Y)$ .

**Решение**

(а) Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение: случайная величина  $X$  имеет геометрическое распределение с параметром  $p$  тогда и только тогда, когда

$$P(X \geq k) = q^{k-1} \quad (q = 1 - p), \quad k = 1, 2, \dots \quad (*)$$

Действительно, пусть  $X$  имеет геометрическое распределение, т.е.

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots. \quad \text{Тогда} \quad P(X \geq k) = \sum_{j=k}^{\infty} q^{j-1} p = q^{k-1}.$$

Обратно, пусть выполнено (\*). Тогда  $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k + 1) = pq^{k-1}$ .

Имеем  $P(Y \geq k) = P(X_1 \geq k, X_2 \geq k) = P(X_1 \geq k) \cdot P(X_2 \geq k) = (q_1 q_2)^{k-1}$ . В силу доказанного утверждения отсюда следует, что величина  $Y$  имеет геометрическое распределение с параметром  $p = 1 - q_1 q_2 = p_1 + p_2 - p_1 p_2$

(б) Пусть  $X$  – геометрическая случайная величина с параметром  $p$ . Тогда

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}.$$

Продифференцируем почленно равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (\text{это можно делать в силу известных свойств степенных рядов}):$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Отсюда (как и следовало ожидать) получаем

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

Таким образом,

$$E(Y) = \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$