ГУ ВШЭ, 2011−12
3 курс, Эконометрика,
П.К.Катышев
22.02.2012

Домашняя работа 3
Решение

Задача 1. Случайная величина *X* имеет показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения случайных величин

а) X^2 ; б) $\sqrt{X}$; в) $\ln(X)$; г) $Y_4 = 1 - e^{-\lambda X}$.

Решение. Обозначим $Y_1 = X^2$, $Y_2 = \sqrt{X}$, $Y_3 = \ln(X)$, $Y_4 = 1 - e^{-\lambda x}$

а) Очевидно, $f_{Y_1}(x) = 0$ при $x < 0$. Если $x \ge 0$, то

$F_{Y_1}(x) = P(X^2 \le x) = P(X \le \sqrt{x}) = 1 - \exp(-\lambda\sqrt{x})$. Отсюда $f_{Y_1}(x) = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} \exp(-\lambda\sqrt{x})$.

б) По определению $F_{Y_2}(x) = P(\sqrt{X} \le x)$. Очевидно, $F_{Y_2}(x) = 0$ при $x < 0$ и плотность равна нулю. Если $x \ge 0$, то $F_{Y_2}(x) = P(\sqrt{X} \le x) = P(X \le x^2) = 1 - \exp(-\lambda x^2)$. Отсюда $f_{Y_2}(x) = 2\lambda x \exp(-\lambda x^2)$.

в) $F_{Y_3}(x) = P\left(\ln X \le x\right) = P(X \le e^x) = 1 - \exp\left(-\lambda e^x\right)$. Отсюда $f_{Y_3}(x) = \lambda \exp\left(x - \lambda e^{\lambda x}\right)$.

г) Поскольку $X \ge 0$, то $0 \le Y_4 \le 1$ и, следовательно, $f_{Y_4}(x) = 0$ при $x < 0$ или при $x > 1$. Пусть $0 \le x \le 1$. Тогда $F_{Y_4}(x) = P\left(1 - e^{-\lambda X} \le x\right) = P\left(X \le -\dfrac{\ln(1-x)}{\lambda}\right) = 1 - \exp\left(\dfrac{\lambda \ln(1-x)}{\lambda}\right) = x$. Это означает, что случайная величина Y_4 имеет равномерное распределение на отрезке [0, 1].

Задача 2. Случайная точка *B* имеет равномерное распределение на окружности $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ с центром в точке $A = (0, a)$, а точка $C = (\xi, 0)$ является пересечением оси абсцисс с прямой, проходящей через точки *A* и *B*. Найти распределение сл. величины ξ (это распределение называется *распределением Коши*).

Решение. Найдём $F_\xi(x) = P(\xi \le x)$. Естественно считать, что $a \ne 0$, так как в противном случае $\xi \equiv 0$, что неинтересно. По соображениям симметрии можно считать, что $a > 0$. По тем же соображениям распределение сл. величины ξ симметрично, т.е. $P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$ для любого измеримого множества *B*. В частности, если ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, то $f_\xi(x) = f_\xi(-x)$. Поэтому найдем $F_\xi(x) = P(\xi \le x)$ для $x \ge 0$. Возможны два случая: $r < a$ и $a \le r$. Рассмотрим первый случай, второй рассматривается аналогично. В силу простых геометрических соображений имеем (сделайте самостоятельно чертёж):

$$P(-x \le \xi \le x) = F_\xi(x) - F_\xi(-x) = \frac{4 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}}{2\pi}.$$

Дифференцируя, получаем

$$2 f_\xi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{a} \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

Обратите внимание, что у этой случайной величины нет среднего значения, и объясните, почему.

Задача 3. Докажите пуассоновское приближение для биномиального распределения: пусть μ_n – число успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха p_n, и пусть $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \Pr(\mu_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\forall k = 0,1,\ldots$.

Решение (не очень строгое).

$$\Pr(\mu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \approx \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot 1$$

Задача 4. Пусть Π_1, Π_2 - независимые пуассоновские случайные величины с параметрами λ_1, λ_2 соответственно. Доказать, что случайная величина $\Pi_1 + \Pi_2$ имеет пуассоновское распределение. Каков параметр этого распределения?

Решение. Найдем распределение величины $\Pi_1 + \Pi_2$. Зафиксируем k из множества $\{0, 1,\ldots\}$. Имеем

$$P(\Pi_1 + \Pi_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(\Pi_1 = i,\ \Pi_2 = k-i) = (\text{в силу независимости}) =$$

$$\sum_{i=0}^{k} P(\Pi_1 = i)\,P(\ \Pi_2 = k-i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\,i}}{i!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\,k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^{\,i}\lambda_2^{\,k-i}}{i!(k-i)!}\frac{k!}{k!} =$$

$$\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^{\,i}\lambda_2^{\,k-i} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}.$$

Таким образом, сумма $\Pi_1 + \Pi_2$ является пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Замечание. Полученный результат хорошо согласуется с интерпретацией пуассоновской случайной величины как числа заявок, поступающих в единицу времени в систему массового обслуживания. Естественно ожидать, что сумма двух независимых потоков заявок будет потоком с тем же типом распределения и суммарной интенсивностью.

Задача 5. На окружности случайным образом выбираются три точки. Чему равна вероятность того, что треугольник с вершинами в выбранных точках является остроугольным?

Решение. Без ограничения общности можно считать, что длина окружности равна 1. Обозначим X длину дуги от первой точки до второй, отсчитываемую против часовой стрелки, и Y – длину дуги от первой точки до третьей, отсчитываемую против часовой стрелки. Случайный выбор трех точек на окружности будем отождествлять с равномерным распределением точки (X, Y) в единичном квадрате $K = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. Из очевидных геометрических соображений следует, что соответствующий треугольник является остроугольным, если

$$\begin{cases} X < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} < Y < X + \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X > \dfrac{1}{2} \\ X - \dfrac{1}{2} < Y < \dfrac{1}{2} \end{cases}. \qquad (*)$$

Множество в K, соответствующее (*), – это два равных треугольника, у которых суммарная площадь равна ¼. Следовательно, искомая вероятность равна ¼.