ГУ ВШЭ, 2011−12
3 курс, Эконометрика,
П.К.Катышев
29.02.2012

Домашняя работа 4
Решение

Задача 1. Двумерный случайный вектор $[X,Y]'$ равномерно распределен в круге $C=\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\}$. Найти
(а) маржинальные распределения *X* и *Y*;
(б) коэффициент корреляции между *X* и *Y*.
Решение. Обозначим $K=\{(x,y): x^2+y^2\le r^2\}$

(а) По определению $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & (x,y)\in K\\ 0, & (x,y)\notin K\end{cases}$. Поэтому

$$f_X(x)=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}\,dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2},\ -r\le x\le r$$ и равна нулю в остальных случаях.

Аналогично

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\frac{1}{\pi r^2}\,dx=\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2},\ -r\le y\le r$$ и равна нулю в остальных случаях.

в) По определению условную плотность $f_{Y|X}(y\,|\,x)$ достаточно найти только для таких *x*, при которых $f_X(x)>0$, т.е. для $-r<x<r$. Считая, что $-r<x<r$, имеем:

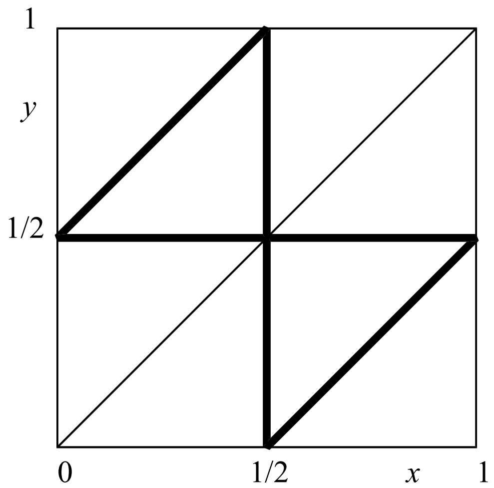
$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & y\in\left(-\sqrt{r^2-x^2},\sqrt{r^2-x^2}\right),\\ 0, & y\notin\left(-\sqrt{r^2-x^2},\sqrt{r^2-x^2}\right)\end{cases}.$$

б) В силу симметричности условной плотности $f_{Y|X}(y\,|\,x)$ относительно 0 имеем $E(Y\,|\,X=x)=0$.

(б) Прямыми вычислениями получаем: $E(XY)=0,\ E(X)=E(Y)=0$ (что, впрочем, почти очевидно и без всяких вычислений). Поэтому $\rho_{XY}=0$.

Задача 2. Стержень длины 1 разломан в двух наугад выбранных местах. Какова вероятность того, что из обломков можно составить треугольник?
Решение. Пусть *x* и *y* — расстояния от начала отрезка до точек разлома. Формализуем слова «в двух наугад выбранных местах» следующим образом: будем считать, что точка (*x, y*) выбирается наугад в квадрате $[0,1]\times[0,1]=[0,1]^2$.
Рассмотрим случай, когда $x<y$. Тогда условие того, что из обломков можно составить треугольник можно представить в виде следующей системы:

$$\begin{cases}x+(y-x)>1-y,\\ (y-x)+(1-y)>x,\\ x+(1-y)>(y-x),\end{cases}\ \text{что эквивалентно}\ \begin{cases}2y>1,\\ 2x<1,\\ 2y<1+2x.\end{cases}\quad \text{(См. рис.)}$$



Верхняя треугольная область описывается приведенными выше неравенствами. Нижняя получается в случае $x > y$.
Так как пара (x, y) равномерно распределена на квадрате $[0,1]^2$, то вероятность попасть в искомую область равна отношению площадей области и квадрата. Нетрудно заметить, что она равна 1/4.

Задача 3. Первый игрок бросает 3, а второй игрок – 2 одинаковых монет. Выигрывает и получает все 5 монет тот, у которого выпадет больше гербов. В случае ничьей игра продолжается до определенного результата. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого из игроков?

Решение. Обозначим X, Y – количество гербов при однократном подбрасывании (партия) у первого и второго игрока, соответственно. Ясно, что эти величины независимы. В каждой партии есть

шесть вариантов выигрыша первого игрока (*first*):

$f_1 = \{X = 1, Y = 0\}$, $f_2 = \{X = 2, Y = 0\}$, $f_3 = \{X = 3, Y = 0\}$,

$f_4 = \{X = 2, Y = 1\}$, $f_5 = \{X = 3, Y = 1\}$, $f_6 = \{X = 3, Y = 2\}$;

три варианта выигрыша второго игрока (*second*):

$s_1 = \{X = 0,\ Y = 1\}$, $s_3 = \{X = 0,\ Y = 2\}$, $s_1 = \{X = 1,\ Y = 2\}$;

три варианта ничьей (*draw*):

$d_1 = \{X = 0, Y = 0\}$, $d_2 = \{X = 1, Y = 1\}$, $d_3 = \{X = 2, Y = 2\}$.

Вероятности каждого из вариантов легко находятся из элементарных комбинаторных соображений:

$$\Pr(f_1) = \frac{3}{32},\ \Pr(f_2) = \frac{3}{32},\ \Pr(f_3) = \frac{1}{32}, \Pr(f_4) = \frac{6}{32},\ \Pr(f_5) = \frac{2}{32},\ \Pr(f_6) = \frac{1}{32};$$

$$\Pr(s_1) = \frac{2}{32},\ \Pr(s_2) = \frac{1}{32},\ \Pr(s_3) = \frac{3}{32};$$

$$\Pr(d_1) = \frac{1}{32},\ \Pr(d_2) = \frac{6}{32},\ \Pr(d_3) = \frac{3}{32}.$$

Любой исход игры можно представить в виде последовательности, заканчивающейся либо буквой f с любым из шести индексов, либо буквой s с любым из трех индексов, перед которой стоит любое число букв d с любыми из трех индексов. Вероятность каждого такого исхода есть произведение вероятностей составляющих ее вариантов букв.
Обозначим

$$p_f = \sum_{i=1}^{6} \Pr(f_i)\left(= \frac{1}{2}\right),\ p_s = \sum_{i=1}^{3} \Pr(s_i)\left(= \frac{3}{16}\right),\ p_d = \sum_{i=1}^{3} \Pr(d_i)\left(= \frac{5}{16}\right).$$

Кропотливо объединяя соответствующие элементарные исходы, нетрудно понять, что выигрыш первого игрока на n-м ходу можно описать последовательностью

$$(\underbrace{d,...,d}_{n-1}, f),$$

которой приписана вероятность $p(f,n) = p_d^{n-1}\, p_f$. Аналогично второй игрок выигрывает на n-м ходу с вероятностью $p(s,n) = p_d^{n-1}\, p_s$. Таким образом, первый игрок выигрывает с вероятностью

$$p(f) = \sum_{n=1}^{\infty} p(f,n) = \frac{p_f}{1-p_d} = \frac{p_f}{p_f + p_s} = \frac{8}{13},$$

а второй – с вероятностью

$$p(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p(s,n) = \frac{p_s}{1-p_d} = \frac{p_s}{p_f + p_s} = \frac{5}{13}.$$

Окончательно выигрыши первого и второго игрока – это такие случайные величины:

W_1	2	–3
$P(W_1)$	8/13	5/13

W_2	3	–2
$P(W_2)$	5/13	8/13

Отсюда

$$E(W_1) = \frac{1}{13}, \quad E(W_2) = -\frac{1}{13}.$$

Задача 4. Двенадцать пассажиров вошли в лифт на первом этаже одиннадцатиэтажного дома. Чему равно среднее число остановок лифта?

Решение. Обозначим S число остановок лифта. Введем случайные величины

$$X_k = \begin{cases} 0, \text{ если лифт не остановился на } (k+1)\text{-м этаже}, \\ 1, \text{ если лифт остановился на } (k+1)\text{-м этаже}, \end{cases} \quad k = 1, 2, ..., 10.$$

Тогда $S = \sum_{k=1}^{10} X_k$, $E(S) = \sum_{k=1}^{10} E\left(X_k\right) = \sum_{k=1}^{10} P(X_k = 1) = \sum_{k=1}^{10} (1 - P(X_k = 0))$, так как $E(X_k) = 0 \cdot P(X_k = 0) + 1 \cdot P(X_k = 1)$.

Распределение людей по этажам равносильно размещению $n = 12$ различимых шаров по $k = 10$ ящикам без ограничений на количество шаров в каждом ящике. Общее число таких размещений равно $N = k^n = 10^{12}$. Событие $X_k = 0$ равносильно тому, что k-й ящик пуст. Число размещений, при которых k-й ящик пуст просто совпадает с числом размещений n шаров по (k–1) ящикам, т.е. равно $M = (k-1)^n = 9^{12}$. Таким образом,

$$E(S) = \sum_{k=1}^{10} (1 - P(X_k = 0)) = 10 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{12}\right) \approx 7.18.$$

Задача 5. При массовом производстве некоторого прибора брак составляет 20% (т.е. бракованный прибор отказывает сразу при включении). Время безотказной работы не бракованного прибора имеет показательное распределение со средним значением 20 часов.

а) Найдите функцию распределения времени безотказной работы прибора.
б) Найдите среднее значение и дисперсию времени безотказной работы прибора.

Решение.

а) Заметим, что параметр показательного распределения, о котором говорится в условии задачи, есть $\lambda = \dfrac{1}{20} = 0.05\,(час^{-1})$.

Обозначим τ – время безотказной работы прибора, и пусть $F(x) = P(\tau \le x)$ – функция распределения этой случайной величины. Очевидно, что $F(x) = 0$ при $x < 0$. Пусть теперь $x \ge 0$. По формуле полной вероятности получаем:

$$P(\tau \le x) = P(\tau \le x \mid \tau = 0)P(\tau = 0) + P(\tau \le x \mid \tau > 0)P(\tau > 0) = 0.2 + (1 - e^{-0.05x}) \cdot 0.8 .$$

Окончательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ 0.2 + 0.8 \cdot (1 - e^{-0.05x}), \quad x \ge 0. \end{cases}$$

б) Поскольку распределение имеет смешанный тип, то для нахождения среднего значения нужно пользоваться следующей формулой:

$$E(\tau) = 0 \cdot P(\tau = 0) + \int_0^\infty xF'(x)dx = 0.8 \cdot 0.05 \int_0^\infty xe^{-0.05x} dx = \frac{0.8}{0.05} = 16 .$$

Аналогично

$$E(\tau^2) = 0 \cdot P(\tau = 0) + \int_0^\infty x^2 F'(x)dx = 0.8 \cdot 0.05 \int_0^\infty x^2 e^{-0.05x} dx = \frac{0.8 \cdot 2}{0.05^2} = 640 ,$$

$$V(\tau) = E(\tau^2) - [E(\tau)]^2 = 384$$