

Домашняя работа 5

Задача 1. Случайная величина X имеет гамма распределение с параметром $a > 0$, если плотность ее распределения есть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \text{где } \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

1) Случайные величины X и Y независимы и имеют гамма распределение с параметрами a и b , соответственно. Доказать, что случайная величина $X + Y$ имеет гамма-распределение, и найти параметр этого распределения.

2) Пусть $Z \sim N(0,1)$. Доказать, что случайная величина $X = \frac{Z^2}{2}$ имеет гамма-распределение с параметром $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Двумерный случайный вектор $[X, Y]'$ равномерно распределен на множестве $M = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 2\}$. Найти функции регрессии X на Y и Y на X .

Задача 3. Пусть X_1, X_2 – независимые пуассоновские случайные величины с параметрами λ_1, λ_2 соответственно. Найти условное распределение $p_n(k) = \Pr(X_1 = k | X_1 + X_2 = n)$, $k = 0, 1, \dots, n$ и $E(X_1 | X_1 + X_2 = n)$

Задача 4. Случайное отклонение размера детали от номинала при ее изготовлении на данном станке имеет нулевое среднее и стандартное отклонение, равное 5 мк. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0.9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение размера от номинала не более чем на 2 мк?