ГУ ВШЭ, 2011−12
Отделение прикладной математики
Эконометрика, проф. П.К.Катышев

Домашняя работа 6

Задача 1. Найти $\mathbf{P}\Big\{\big(X-\mathbf{E}(X)\big(< 3\sqrt{\mathbf{V}(X)}\Big\}$, если X имеет а) нормальное распределение $N(0,\sigma^2)$; б) показательное распределение с параметром $\lambda = 1$; в) равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$.

Задача 2. Пусть X − количество альфа-частиц, зарегистрированных счетчиком Гейгера за 30 секунд. Предположим, X распределено по закону Пуассона со средним $\lambda = 49$. Оцените $\mathrm{P}(45 < X < 60)$.

Задача 3. Для определения доли p избирателей, поддерживающих на выборах кандидата X, производится случайная выборка. Найти объем выборки, при котором с вероятностью 0.95 погрешность оценки доли p (по выборке) будет не больше 0.002.

Задача 4. Как известно, одним из следствий центральной предельной теоремы является нормальное приближение для биномиального распределения, а именно (*это есть на лекции*), если X − биномиальная случайная величина с параметрами (n, p), то при больших n распределение величины $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ близко к стандартному нормальному. На практике приближением можно пользоваться при выполнении некоторых эмпирических ограничений, таких как $n > 40,\ np > 10,\ n(1-p) > 10$.
Предположим теперь, что, говоря нестрого, число n увеличивается, а вероятность успеха p (ее естественно обозначить p_n) убывает, так что

$$n \cdot p_n \approx \lambda > 0.$$

Докажите, что в этом случае биномиальное распределение приближается пуассоновским:

$$P(X = k) \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0,1,\ldots.$$