

Домашняя работа 7

**Задача 1.** Два исследователя интересуются средним доходом жителей Самарской области. Первый сделал случайную выборку объёмом 10, второй – объёмом 15. Результаты их наблюдений приведены в таблице:

	<i>Первый</i>	<i>Второй</i>
$n$	10	15
$\sum_{t=1}^n x_t$	1771	2409
$\sum_{t=1}^n x_t^2$	375881	462221

Предположим, что доход в области имеет нормальное распределение.

- Вычислите точечную оценку среднего значения  $\mu$ , полученную первым исследователем, и постройте 95%-ный доверительный интервал для этого параметра
- Повторите п. (а) для второго исследователя.
- Предложите наиболее эффективную точечную оценку, основанную на наблюдениях первого и второго исследователей, и постройте 95%-ный доверительный интервал для  $\mu$ .

**Задача 3.** Рассмотрим две независимых оценки  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  некоторого параметра  $\theta$ . Обе оценки являются несмещенными, но вторая менее точна:  $\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \sigma^2$ ,  $\text{Var}(\hat{\theta}_2) = 3\sigma^2$ . Рассмотрим оценку вида

$$W = a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые константы.

- Каким условиям должны удовлетворять  $a$  и  $b$ , чтобы  $\text{Var}(W) = 2\sigma^2$ ?
- Каким условиям должны удовлетворять  $a$  и  $b$ , чтобы  $W$  была несмещенной оценкой параметра  $\theta$ ?
- Найдите оценку  $W$ , удовлетворяющую условиям (а) и (б).
- Можно ли найти оценку  $W$  вида (1), более эффективную, чем  $\hat{\theta}_1$ ?

**Задача 3.** Губернатор N-ской области заявил в печати, что среднемесячный доход в области не менее 10 000 руб. Произведена выборка объёма 35 из жителей этой области. Выборочное среднее их месячных доходов равно 9 940 руб., стандартное отклонение равно 180 руб. Дают ли эти результаты основание сомневаться в официальном утверждении?

**Задача 4.** Генеральная совокупность является нормальной  $N(\mu, 2)$ . Для проверки гипотезы  $H_0: \mu = 1$  против альтернативы  $H_a: \mu \neq 1$  предлагается следующий тест: 1) сделать случайную выборку объёма 20 из генеральной совокупности и вычислить выборочное среднее  $\bar{x}$ , 2) если  $\bar{x} \in [0, 2]$ , то нулевая гипотеза  $H_0$  не отвергается; если  $\bar{x} \notin [0, 2]$ , то нулевая гипотеза  $H_0$  отвергается в пользу альтернативы  $H_a$ .

(а) Найдите значимость теста.

(б) Найдите мощность теста, если  $\mu = 2$ .

**Задача 5.** Было проведено исследование, цель которого – выяснить, есть ли различие в количестве юмора, содержащегося в американских и британских рекламных изданиях. Случайная выборка 270 американских рекламных изданий показала, что в 56 из них содержался юмор. Аналогичная выборка объёма 203 британских изданий показала, что в 52 из них есть юмор. Дают ли эти данные свидетельства о том, что есть значимая разность в пропорциях юмора в американских и британских изданиях?

**Задача 6.** Тестируется нулевая гипотеза

$$H_0: \mu = \mu_0$$

для среднего значения нормальной генеральной совокупности против односторонней альтернативы

$$H_1: \mu > \mu_0$$

с помощью стандартного  $t$ -теста. Известно, что на 5%-ном уровне значимости нулевая гипотеза не была отвергнута.

(а) Следует ли отсюда, что  $\mu_0$  содержится в стандартном 95%-ном доверительном интервале для  $\mu$ ?

(б) Следует ли отсюда, что  $\mu_0$  содержится в стандартном 90%-ном доверительном интервале для  $\mu$ , если известно, что наблюдаемое выборочное среднее больше, чем  $\mu_0$ ?