

Домашняя работа 8

Задача 1. Выведите формулы для МНК-оценок параметров β_1, β_2 в модели парной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$.

Задача 2. Дана стандартная модель линейной множественной регрессии $y = X\beta + \varepsilon$, причём среди регрессоров есть константа. Строится МНК-оценка b параметра β и вектор прогнозных значений $\hat{y} = Xb$. Покажите, что в парной регрессии y_i на константу и \hat{y}_i оценка свободного члена равна нулю, а коэффициента наклона равна единице.

Задача 3. Для модели парной регрессии $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, 20$ известно, что $\sum x_i = 60, \sum x_i^2 = 300, \sum y_i = 16, \sum y_i^2 = 32, \sum x_i y_i = 28$ (всюду суммирование от 1 до 20).

(а) Найдите МНК-оценки параметров α, β .

(б) Найдите сумму квадратов остатков регрессии и вычислите оценку дисперсии модели.

Задача 4. В таблице даны оценки десяти студентов за промежуточный (*midterm*) и финальный (*final*) экзамены по статистике.

Промежуточный	Финальный	Промежуточный	Финальный
70	87	67	73
74	79	70	83
80	88	64	79
84	98	74	91
80	96	82	94

(а) Оцените линейную регрессию финальной оценки на промежуточную оценку.

(б) Вычислите $\hat{\sigma}^2$.

(с) Проверьте гипотезу $H_0: \beta = 0$ против альтернативы $H_1: \beta > 0$ на 2.5%-ном уровне значимости.

(d) Проверьте гипотезу $H_0: \beta = 0$ против альтернативы $H_1: \beta \neq 0$ на 5%-ном уровне значимости.

(е) Постройте 95%-ный доверительный интервал для величин $E(\text{final})$, если $\text{midterm} = 68, 75$ и 82 .