Задача 1.

Управляющий фирмы «Свежие нефтепродукты» пытается определить оптимальное распределение имеющейся в его распоряжении сырой нефти (различного сорта) по двум возможным технологическим процессам составления смесей. Технологический процесс 1 характеризуется следующими показателями: из одной единицы объема сырой нефти A и трех единиц объема сырой нефти B получается пять единиц объема бензина X и две единицы объема бензина Y. Технологический процесс 2 характеризуется другими показателями: из четырех единиц объема сырой нефти A и двух единиц объема сырой нефти B получается три единицы бензина X и восемь единиц бензина Y. Доступное количество запасов сырой нефти A равняется 100 единицам объема, а сырой нефти B — 150 единицам объема. По условиям поставок требуется произвести не менее 200 единиц объема бензина X и 75 единиц объема бензина Y. Доходы с единицы объема продукции, получаемой с помощью технологических процессов 1 и 2, составляют p_1 и p_2 соответственно. Данную задачу составления горючих смесей требуется сформулировать в виде задачи линейного программирования.

Задача 2.

Найти множество максимальных по Парето и слабо максимальных по Парето точек в следующей многокритериальной задаче:

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + x_2, \\ f_2 = x_1, \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 7, \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 7, \\ x_1 \leqslant {}^3\!/_2, \\ x_2 \leqslant {}^5\!/_4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Задача 3.

Максимизировать $60x_1 + 26x_2 + 15x_3 + 4.75x_4$ при ограничениях

$$\begin{cases} 20x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \leqslant 20, \\ 10x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 10, \\ x_i \geqslant 0. \end{cases}$$

Задача 4.

Нефтедобывающая фирма приступает к разработке месторождения. Разрешение на ведение работ рассчитано на 10 лет и продлению не подлежит. Новое добывающее оборудование стоит 10 условных денежных единиц (уде), за первый год эксплуатации на ремонт уходит 1 уде, за второй — 2, за третий — 4 и т.д.: крайний север, всё изнашивается быстро... В конце каждого года оборудование можно заменить на новое, при этом стоимость продажи старого оборудования составляет $10 * 2^{-n}$, где n — возраст оборудования. Требуется разработать план-график замены оборудования на всё время добычи. (Подсказка: казалось бы, причём здесь графы и транспортные задачи...)

Задача 5.

Докажите теорему Шмитке: Пусть A — матрица размера $m \times n$. Тогда совместна одна и только одна из следующих двух систем:

$$\begin{gathered} Ax = 0_m, \qquad x > 0_n, \\ A^T\lambda \geqslant 0_n, \quad A^T\lambda \neq 0_n. \end{gathered}$$

Обратите внимание, во-первых, на то, что некоторые из неравенств строгие, а во вторых на то, что это теорема-критерий — то есть её надо доказывать в обе стороны!