Лабораторная работа 1
“Численное решение обобщенного уравнения Пуассона”
Задание

1. Разобраться с предложенными в варианте краевой задачей и разностной схемой (см. отдельный файл с вариантами заданий) и одношаговым итерационным методом (см. ниже) и выполнить следующие теоретические задания.

   а) Вывести интегральное тождество для решения заданной краевой задачи. Убедиться в симметричности и положительности возникшей билинейной формы задачи.

   б) Вывести сумматорное тождество для решения заданной разностной схемы. Убедиться в симметричности и положительной определенности возникшей билинейной формы схемы.

   в) Вывести оценку погрешности аппроксимации одного из краевых условий Робина (или Неймана), присутствующего в краевой задаче.

   При отсутствии таких краевых условий дать оценку погрешности аппроксимации уравнения.

   г) Вывести формулы заданного итерационного метода, специфицированные для заданной разностной схемы с учетом следующего.

   Решение разностной схемы v_{ij}, $0 \leqslant i \leqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant M$ удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений, состоящей из аппроксимаций уравнения и краевых условий. Указанная система уравнений должна решаться при помощи заданного одношагового итерационного метода. Приближенные решения следует хранить и обрабатывать как двумерные (а не одномерные) массивы. Реализация всех методов *не предполагает* явное формирование и хранение матрицы системы. Это означает, что методы применяются нестандартно:

   для методов Зейделя и релаксации надо в силу основных уравнений системы (т.е аппроксимаций дифференциального уравнения и краевых условий Неймана и Робина) *выразить искомые компоненты вектора $k+1$-го приближения через предыдущие его компоненты и компоненты вектора k-го приближения*; это предполагает, что двумерные массивы тем или иным образом *мысленно* упорядочиваются как одномерные;

   для методов с постоянным параметром, скорейшего спуска (оба варианта), минимальных невязок (оба варианта) *надо только уметь применять матрицу системы к некоторому вектору*, т.е вычислять разностные операторы, стоящие в аппроксимациях дифференциального уравнения и краевых условий Неймана и Робина, и (если это необходимо) затем вычитать из результата заданные правые части этих аппроксимаций.

   Для применения методов с постоянным параметром, скорейшего спуска, минимальных невязок система должна иметь матрицу $A = A^T > 0$. Соответствующие указания по предварительному масштабированию уравнений системы даны для каждой из групп вариантов задания после описания разностных схем.

   Для всех методов начальное приближение *должно удовлетворять сеточным условиям Дирихле* (в остальных узлах его можно задать, например, нулем). Последующие приближения в узлах, где задается условие Дирихле, *не должны меняться* в процессе итераций. Кроме того, в методах с постоянным параметром, скорейшего спуска, минимальных невязок (оба варианта) невязки и произведения матрицы на вектор не должны вычисляться в узлах, где задается условие Дирихле, а скалярные произведения должны браться по всем узлам, кроме тех, где задается условие Дирихле (т.е. где выписываются аппроксимации дифференциального уравнения и краевых условий Неймана или Робина).

2. Подготовить тест решений вида $u(x, y) = d_0 + d_1 x + d_2 y$ (в случае декартовой системы координат), $u(r, \varphi) = d_0 + d_1 r + d_2 \varphi$ (в случае полярной системы координат) или $u(r, z) = d_0 + d_1 r + d_2 z$ (в случае цилиндрической системы координат), на которых решение разностных схем совпадает с точным решением краевой задачи даже на грубых сетках (в пределах вычислительной погрешности).

3. Написать программу в среде Маткад-14 для приближенного с заданной точностью $\varepsilon > 0$ вычисления решения разностной схемы заданным методом. Постараться реализовать метод максимально эффективно. *Использовать минимальное для заданного метода количество массивов с двумя индексами.*

   Представить рабочий лист Маткад-14 с результатами выполнения теста на грубых сетках (не более нескольких десятков узлов по каждому направлению) последовательно при:

   а) $d_0 \neq 0$, $d_1 = d_2 = 0$;

   б) $d_1 \neq 0$, $d_0 = d_2 = 0$;

   в) $d_2 \neq 0$, $d_0 = d_1 = 0$

   с 3D графиками найденного приближенного решения и его погрешности. Значения N и M брать в пределах нескольких десятков. Проследить за ростом количества итераций $k_0(\varepsilon)$ с уменьшением ε для нескольких значений ε.

   Дополнительно подготовить анимации 3D графиков всех последовательных приближений в зависимости от номера итерации, позволяющих проследить за процессом сходимости приближений. Для этого все приближения записывать в качестве элементов некоторого одномерного массива. Масштаб по оси значений в них должен быть заранее подобран и не меняться в ходе анимации. В поле анимации включить выдачу текущего значения параметра FRAME (фактически номера итерации).

4. Решение предложенных в вариантах краевых задач зависит от 4 граничных функций и правой части уравнения f. Требуется решить 3 задачи:

   Группа 471ПМ решает 3 задачи, в которых:

   1) функции g_0 (или q_0) и g_3 (или q_3) — ненулевые постоянные, а остальные граничные функции и f нулевые;

   2) функции g_1 (или q_1) и g_2 (или q_2) — ненулевые постоянные, а остальные граничные функции и f нулевые;

   3) функция f зависит только от первой координаты, является ненулевой постоянной на левой половине отрезка изменения этой координаты и равна 0 на правой его половине, а все граничные функции нулевые.

   Группа 472ПМ решает 3 задачи, в которых:

1) функции g_0 (или q_0) и g_2 (или q_2) — ненулевые постоянные, а остальные граничные функции и f нулевые;

2) функции g_1 (или q_1) и g_3 (или q_3) — ненулевые постоянные, а остальные граничные функции и f нулевые;

3) функция f зависит только от второй координаты, является ненулевой постоянной на правой половине отрезка изменения этой координаты и равна 0 на левой его половине, а все граничные функции нулевые.

Подготовить трехмерные графики найденных решений и анимации, иллюстрирующие сходимость приближений (как и в тестах).

При необходимости могут быть предложены дополнительные задачи с учетом специфики вариантов.

1 Одношаговые итерационные методы

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

с квадратной матрицей $A = A^T > 0$ порядка n.

Во всех используемых в задании одношаговых итерационных методах задается произвольное начальное приближение x^0. Конкретный итерационный метод определяется способом вычисления по известному приближению x^k нового приближения x^{k+1}. Для заданной точности $\varepsilon > 0$ итерации выполняются для $k = 0, 1, \ldots, k_0(\varepsilon)$ до удовлетворения предложенного практического условия окончания итераций.

1.1 Метод Зейделя

Метод Зейделя определяется формулами

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^k \right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Первая из сумм считается равной 0 при $i = 1$, а вторая — при $i = n$.

1.2 Метод релаксации

В методе релаксации сначала вычисляется вспомогательное приближение

$$\tilde{x}_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^k \right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Первая из сумм считается равной 0 при $i = 1$, а вторая — при $i = n$. Затем новое приближение вычисляется по формуле

$$x^{k+1} = \omega \tilde{x}^{k+1} + (1 - \omega) x^k,$$

где $\omega \in (0, 1]$ — параметр релаксации.

1.3 Метод с постоянным параметром

Метод с постоянным параметром определяется формулами

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \tau r_i^k, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$r_i^k \equiv (Ax^k - b)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^k - b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

а τ — параметр метода. В данном задании рекомендуется его вычислить по формуле $\tau = 1/\|A\|_\infty$, где

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1.4 Метод скорейшего спуска (вариант А)

В методе скорейшего спуска (вариант А) сначала вычисляется вектор невязки

$$r_i^k \equiv (Ax^k - b)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^k - b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Затем вычисляется величина

$$\alpha_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (r_i^k)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^k r_i^k}, \quad \text{где } y_i^k \equiv (Ar^k)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j^k, \quad i = 1, \ldots, n$$

и новое приближение

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k r^k.$$

В данном варианте метода для хранения величин y_i^k массив не заводится.

1.5 Метод скорейшего спуска (вариант Б)

В методе скорейшего спуска (вариант Б) только на начальной итерации вычисляется вектор невязки по формуле

$$r_i^0 \equiv (Ax^0 - b)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

На каждой итерации сначала вычисляется вспомогательный вектор

$$y_i^k \equiv (Ar^k)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j^k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Затем вычисляется величина

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i^k)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^k r_i^k}$$

и два вектора

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k r^k,$$
$$r^{k+1} = r^k - \alpha_k y^k.$$

1.6 Метод минимальных невязок (вариант А)

В методе минимальных невязок (вариант А) сначала вычисляется вектор невязки

$$r_i^k \equiv (Ax^k - b)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^k - b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Затем вычисляется величина

$$\beta_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i^k y_i^k}{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i^k)^2}, \quad \text{где } y_i^k \equiv (Ar^k)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j^k, \quad i = 1, \ldots, n$$

и новое приближение

$$x^{k+1} = x^k - \beta_k r^k.$$

В данном варианте метода для хранения величин y_i^k массив не заводится.

1.7 Метод минимальных невязок (вариант Б)

В методе минимальных невязок (вариант Б) только на начальной итерации вычисляется вектор невязки по формуле

$$r_i^0 \equiv (Ax^0 - b)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

На каждой итерации сначала вычисляется вспомогательный вектор

$$y_i^k \equiv (Ar^k)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j^k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Затем вычисляется величина

$$\beta_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i^k y_i^k}{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i^k)^2}$$

и два вектора

$$x^{k+1} = x^k - \beta_k r^k,$$
$$r^{k+1} = r^k - \beta_k y^k.$$