

Лабораторная работа 1

“Численное решение обобщенного уравнения Пуассона”

Задания для группы 471ПМ. Варианты 1-6

1 Варианты краевых задач

1.1 Декартова система координат, случай 1

Решается уравнение

$$-a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e(x, y)u = f(x, y)$$

при $0 < x < X$, $0 < y < Y$, с коэффициентами $a > 0$, $b > 0$ и $e(x, y) \geq 0$.

Ставится одно из следующих краевых условий на левой границе

$$u(0, y) = g_0(y) \quad (\text{условие Дирихле}),$$

$$-a^2 \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = q_0(y) \quad (\text{условие Неймана}),$$

$$-a^2 \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + \alpha_0 u(0, y) = q_0(y) \quad (\text{условие Робина})$$

и одно из следующих краевых условий на правой границе

$$u(X, y) = g_1(y) \quad (\text{условие Дирихле}),$$

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial x}(X, y) = q_1(y) \quad (\text{условие Неймана}),$$

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial x}(X, y) + \alpha_1 u(X, y) = q_1(y) \quad (\text{условие Робина})$$

при $0 < y < Y$, с постоянными коэффициентами $\alpha_0 \geq 0$ и $\alpha_1 \geq 0$.

Ставится также одно из следующих краевых условий на нижней границе

$$u(x, 0) = g_2(x) \quad (\text{условие Дирихле}),$$

$$-b^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = q_2(x) \quad (\text{условие Неймана}),$$

$$-b^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + \alpha_2 u(x, 0) = q_2(x) \quad (\text{условие Робина})$$

и одно из следующих краевых условий на верхней границе

$$u(x, Y) = g_3(x) \quad (\text{условие Дирихле}),$$

$$b^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, Y) = q_3(x) \quad (\text{условие Неймана}),$$

$$b^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, Y) + \alpha_3 u(x, Y) = q_3(x) \quad (\text{условие Робина})$$

при $0 < x < X$, с постоянными коэффициентами $\alpha_2 \geq 0$ и $\alpha_3 \geq 0$.

2 Разностная схема

Рассматривается равномерная сетка по x на $[0, X]$ с узлами $x_i = ih_x$, $0 \leq i \leq N$ и шагом $h_x = X/N$ и неравномерная сетка по y на $[0, Y]$ с узлами $y_j = p(j/M)Y$, $0 \leq j \leq M$ и шагами $h_{yj} = y_j - y_{j-1}$. Здесь p — заданная функция распределения узлов, возрастающая на $[0, 1]$ и такая, что $p_x(0) = 1$, $p_x(1) = 1$.

Положим $\hat{h}_{yj} = (h_{yj} + h_{y(j+1)})/2$ при $1 \leq j \leq M - 1$. Введем разностные операторы

$$\partial_x w_{ij} := \frac{w_{(i+1)j} - w_{ij}}{h_x}, \quad \bar{\partial}_x w_{ij} := \frac{w_{ij} - w_{(i-1)j}}{h_x},$$

$$L_{xh} w_{ij} := a^2 \frac{w_{(i+1)j} - 2w_{ij} + w_{(i-1)j}}{h_x^2}$$

и

$$\partial_y w_{ij} := \frac{w_{i(j+1)} - w_{ij}}{h_{y(j+1)}}, \quad \bar{\partial}_y w_{ij} := \frac{w_{ij} - w_{i(j-1)}}{h_{yj}},$$

$$L_{yh} w_{ij} := \frac{b^2}{\hat{h}_{yj}} \left(\frac{w_{i(j+1)} - w_{ij}}{h_{y(j+1)}} - \frac{w_{ij} - w_{i(j-1)}}{h_{yj}} \right).$$

Дифференциальное уравнение аппроксимируется так

$$-(L_{xh} v)_{ij} - (L_{yh} v)_{ij} + e(x_i, y_j) v_{ij} = f(x_i, y_j), \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad 1 \leq j \leq M - 1. \quad (1)$$

1. Аппроксимация краевых условий Дирихле имеет вид: на левой и правой границах

$$v_{0j} = g_0(y_j), \quad v_{Nj} = g_1(y_j), \quad 0 \leq j \leq M,$$

на нижней и верхней границах

$$v_{i0} = g_2(x_i), \quad v_{iM} = g_3(x_i), \quad 0 \leq i \leq N.$$

2. Аппроксимация краевого условия Робина на левой границе имеет вид

$$-a^2 \partial_x v_{0j} + \alpha_0 v_{0j} - \frac{h_x}{2} [(L_{yh} v)_{0j} - e(0, y_j) v_{0j}] = q_0(y_j) + \frac{h_x}{2} f(0, y_j), \quad 1 \leq j \leq M - 1, \quad (2)$$

а на правой границе — вид

$$a^2 \bar{\partial}_x v_{Nj} + \alpha_1 v_{Nj} - \frac{h_x}{2} [(L_{yh} v)_{Nj} - e(X, y_j) v_{Nj}] = q_1(y_j) + \frac{h_x}{2} f(X, y_j), \quad 1 \leq j \leq M - 1. \quad (3)$$

Аппроксимация краевого условия Неймана получается из указанных при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$.

3. Аппроксимация краевого условия Робина на нижней границе имеет вид

$$-b^2 \partial_y v_{i0} + \alpha_2 v_{i0} - \frac{h_{y1}}{2} [(L_{xh} v)_{i0} - e(x_i, 0) v_{i0}] = q_2(x_i) + \frac{h_{y1}}{2} f(x_i, 0), \quad 1 \leq i \leq N - 1. \quad (4)$$

а на верхней границе — вид

$$b^2 \bar{\partial}_y v_{iM} + \alpha_3 v_{iM} - \frac{h_{yM}}{2} [(L_{xh} v)_{iM} - e(x_i, Y) v_{iM}] = q_3(x_i) + \frac{h_{yM}}{2} f(x_i, Y), \quad 1 \leq i \leq N - 1. \quad (5)$$

Аппроксимация краевого условия Неймана получается из указанных при $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

Для симметризации матрицы системы при применении итерационных методов с постоянным параметром, скорейшего спуска (оба варианта), минимальных невязок (оба варианта) уравнения (1), (2), (3) следует умножить соответственно на

$$h_{yj}, \quad \frac{h_{yj}}{h_x}, \quad \frac{h_{yj}}{h_x}.$$

(проверить это).