Лабораторная работа 4
“Численное решение обобщенного уравнения Пуассона”
Задания для группы 472ПМ. Варианты 1-7

1 Варианты краевых задач

1.1 Цилиндрическая система координат

Решается уравнение

$$-\frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(r,z)$$

при $r_0 < r < R$, $0 < z < Z$, с постоянными коэффициентами $a > 0$, $b > 0$. Здесь $r_0 > 0$.

Ставится одно из следующих краевых условий на левой границе

$$u(r_0, z) = g_0(z) \quad \text{(условие Дирихле)},$$

$$-a^2\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, z) = q_0(z) \quad \text{(условие Неймана)},$$

$$-a^2\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, z) + \alpha_0 u(r_0, z) = q_0(z) \quad \text{(условие Робина)}$$

и одно из следующих краевых условий на правой границе

$$u(R, z) = g_1(z) \quad \text{(условие Дирихле)},$$

$$a^2\frac{\partial u}{\partial r}(R, z) = q_1(z) \quad \text{(условие Неймана)},$$

$$a^2\frac{\partial u}{\partial r}(R, z) + \alpha_1 u(R, z) = q_1(z) \quad \text{(условие Робина)}$$

при $0 < z < Z$, с постоянными коэффициентами $\alpha_0 \geqslant 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$.

Ставится также одно из следующих краевых условий на нижней границе

$$u(r, 0) = g_2(r) \quad \text{(условие Дирихле)},$$

$$-b^2\frac{\partial u}{\partial z}(r, 0) = q_2(r) \quad \text{(условие Неймана)},$$

$$-b^2\frac{\partial u}{\partial z}(r, 0) + \alpha_2 u(r, 0) = q_3(r) \quad \text{(условие Робина)}$$

и одно из следующих краевых условий на верхней границе

$$u(r, Z) = g_3(r) \quad \text{(условие Дирихле)},$$

$$b^2\frac{\partial u}{\partial z}(r, Z) = q_3(r) \quad \text{(условие Неймана)},$$

$$b^2\frac{\partial u}{\partial z}(r, Z) + \alpha_3 u(r, Z) = q_3(r) \quad \text{(условие Робина)}$$

при $r_0 < r < R$, с постоянными коэффициентами $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_3 \geqslant 0$.

2 Разностная схема

Рассматривается неравномерная сетка по r на $[r_0, R]$ с узлами $r_i = r_0 + p(i/N)(R - r_0)$, $0 \leqslant i \leqslant N$ и шагами $h_{ri} = r_i - r_{i-1}$ и равномерная сетка по z на $[0, Z]$ с узлами $z_j = jh_z$, $0 \leqslant j \leqslant M$ и шагом $h_z = Z/M$. Здесь p — заданная функция распределения узлов, возрастающая на $[0, 1]$ и такая, что $p(0) = 1$, $p(1) = 1$.

Положим $\tilde{r}_i = (r_{i-1} + r_i)/2$ при $1 \leqslant i \leqslant N$ и $\hat{h}_{ri} = (h_{ri} + h_{r(i+1)})/2$ при $1 \leqslant i \leqslant N - 1$. Введем разностные операторы

$$\partial_r w_{ij} := \frac{w_{(i+1)j} - w_{ij}}{h_{r(i+1)}}, \quad \bar{\partial}_r w_{ij} := \frac{w_{ij} - w_{(i-1)j}}{h_{ri}},$$

$$L_{rh} w_{ij} := \frac{a^2}{r_i} \frac{1}{\hat{h}_{ri}} \left(\tilde{r}_{i+1} \frac{w_{(i+1)j} - w_{ij}}{h_{r(i+1)}} - \tilde{r}_i \frac{w_{ij} - w_{(i-1)j}}{h_{ri}} \right)$$

и

$$\partial_z w_{ij} := \frac{w_{i(j+1)} - w_{ij}}{h_z}, \quad \bar{\partial}_z w_{ij} := \frac{w_{ij} - w_{i(j-1)}}{h_z},$$

$$L_{zh} w_{ij} := b^2 \, \frac{w_{i(j+1)} - 2w_{ij} + w_{i(j-1)}}{h_z^2}.$$

Дифференциальное уравнение аппроксимируем так

$$-(L_{rh} v)_{ij} - (L_{zh} v)_{ij} = f(r_i, z_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant N - 1, \ 1 \leqslant j \leqslant M - 1. \tag{1}$$

1. Аппроксимация краевых условий Дирихле имеет вид: на левой и правой границах

$$v_{0j} = g_0(z_j), \quad v_{Nj} = g_1(z_j), \quad 0 \leqslant j \leqslant M,$$

на нижней и верхней границах

$$v_{i0} = g_2(r_i), \quad v_{iM} = g_3(r_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant N.$$

2. Аппроксимация краевого условия Робина на левой границе имеет вид

$$-\frac{a^2 \tilde{r}_1}{r_0} \, \partial_r v_{0j} + \alpha_0 v_{0j} - \frac{h_{r1}}{2} (L_{zh} v)_{0j} = q_0(z_j) + \frac{h_{r1}}{2} f(r_0, z_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant M - 1, \tag{2}$$

а на правой границе — вид

$$\frac{a^2 \tilde{r}_N}{R} \, \bar{\partial}_r v_{Nj} + \alpha_1 v_{Nj} - \frac{h_{rN}}{2} (L_{zh} v)_{Nj} = q_1(z_j) + \frac{h_{rN}}{2} f(R, z_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant M - 1. \tag{3}$$

Аппроксимация краевого условия Неймана получается из указанных при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$.

3. Аппроксимация краевого условия Робина на нижней границе имеет вид

$$-b^2 \partial_z v_{i0} + \alpha_2 v_{i0} - \frac{h_z}{2} (L_{rh} v)_{i0} = q_2(r_i) + \frac{h_z}{2} f(r_i, 0), \quad 1 \leqslant i \leqslant N - 1, \tag{4}$$

а на верхней границе — вид

$$b^2 \bar{\partial}_z v_{iM} + \alpha_3 v_{iM} - \frac{h_z}{2}(L_{rh}v)_{iM} = q_3(r_i) + \frac{h_z}{2} f(r_i, Z), \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1. \tag{5}$$

Аппроксимация краевого условия Неймана получается из указанных при $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

Для симметризации матрицы системы при применении итерационных методов с постоянным параметром, скорейшего спуска (оба варианта), минимальных невязок (оба варианта) уравнения (1)-(5) следует умножить соответственно на множители

$$r_i \hat{h}_{ri}, \quad r_0, \quad R, \quad r_i \frac{\hat{h}_{ri}}{h_z}, \quad r_i \frac{\hat{h}_{ri}}{h_z}$$

(проверить это).