

**«Нулевой» вариант контрольной работы по курсу «Математический анализ-3»,
для студентов 3-го курса ОПМИ НИУ ВШЭ
на тему «Функции комплексного переменного»**

1. Решите уравнения (ответ – в алгебраической форме):

а) $z^3 + 6z^2 + 12z + 8 - \frac{(-1-i)^7(\sqrt{3}-3i)^{12}}{(-4+4i)^5} = 0$; б) $\cos(z-i) = 4i$.

2. Укажите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} |z-4| \leq |z-1-5i|, & 1 \leq |z-2-2i| \leq 3, \\ \operatorname{Re} z \geq 2, & |\arg(z-2-2i)| \geq \pi/6. \end{cases}$$

3. Найдите голоморфную функцию $f(z)$, если $\frac{-y-1}{(x+3)^2+(y+1)^2}$ – ее мнимая часть.

4. Вычислите с помощью формулы Коши или формулы Коши для производной:

а) $\oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh} z dz}{z^3 - 8i}$, $\Gamma: z = 1 - i + 2 \cos t + i \frac{3}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$;

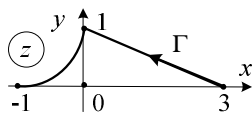
б) $\oint_{\Gamma} \frac{e^{3z} dz}{z^5 + 9z^3}$, $\Gamma: |z| + |z - 3i| = 4$.

5. Найдите разложение функции $f(z) = \frac{z^4 - 1}{z^3 + 4z}$ в ряд Лорана в кольце $\{z: 2 < |z - 2i| < 4\}$, выделите главную и правильную части разложения.

6. Найдите все особые точки функции $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{2z^3 + z^2} + e^{1/(z+2)}$ и укажите их характер.

7. Запишите ФКП, гомеоморфно отображающую угол $\{z \in \mathbb{C}: \pi/6 < \arg(z-1+2i) < \pi/3\}$ на круг $\{w \in \mathbb{C}: |w+2-i| < 3\}$.

8. Вычислите интегралы (ответ – в алгебраической форме):



а) $\int_{\Gamma} (\bar{z} + 1 + i) dz$;

б) $\int_{\Gamma} (z-4) \sin(\pi z) dz$.

9. Вычислите интегралы с помощью теоремы Коши о вычетах и разложения функции в ряд Лорана:

а) $\int_{|z-i|=1} (2z^2 + z - 1) \cos(2/(z-i)) dz$;

б) $\int_{|z|=3} \frac{7z^{23} + 2z}{(5z^{10} - 64)(3z^{14} + 1)} dz$.

Замечания:

- 1) в «настоящем» варианте будет 8-10 заданий из приведенного списка;
- 2) в вариант включено вычисление с помощью вычетов только тех интегралов, которые требуют разложения в ряд Лорана в конечной (9.а) или бесконечной (9.б) точках (см. разобранные на лекционных и семинарских занятиях примеры).