

# Современная прикладная алгебра. Прикладная теория решеток.

С.О. Кузнецов

Тема 3. Полурешетки и решетки

# Грани и точные грани

Пусть  $(P, \leq)$  - частично-упорядоченное множество и  $A \subseteq P$ .

**Верхняя грань** подмножества  $A \subseteq P$  есть множество

$$\{b \in P \mid \forall a \in A \quad b \geq a\}.$$

**Точная (или наименьшая) верхняя грань** подмножества  $A \subseteq P$  есть наименьший элемент  $b$  верхней грани  $A$  (если он существует):

1.  $\forall a \in A \quad b \geq a,$
2.  $\forall x \in P (\forall a \in A \quad x \geq a) \Rightarrow x \geq b.$

Точная верхняя грань множества  $A$  называется также **супремум**  $A$  и обозначается **sup(A)**.

Двойственно для **точной (наибольшей) нижней грани** **inf(A)** подмножества  $A \subseteq P$ , которая называется также **инфимум**  $A$ .

# Полурешетки

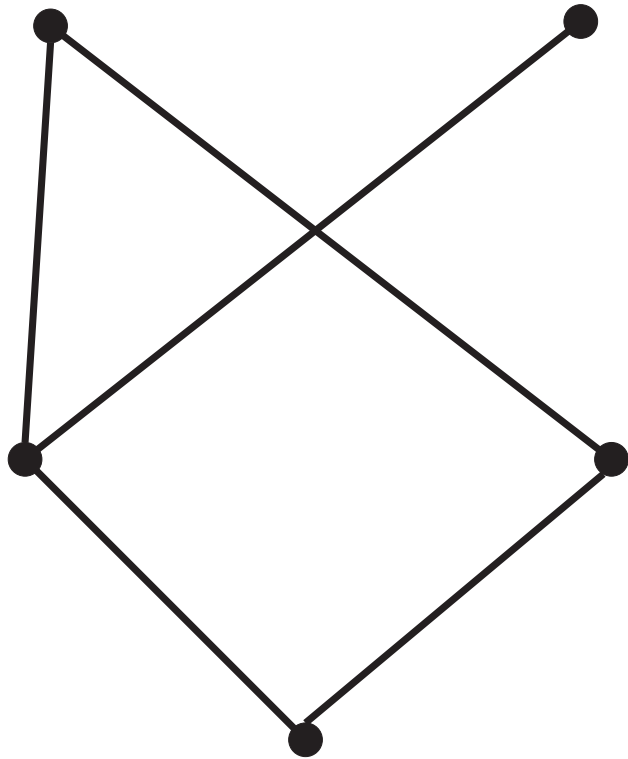
Частично-упорядоченное множество  $(SL, \leq)$  называется **верхней полурешеткой**, если для любой пары элементов множества  $x, y \in SL$  существуют супремум  $\sup\{x, y\}$ .

Двойственно для **нижней полурешетки**, определяемой относительно инфимума:

Частично-упорядоченное множество  $(SL, \leq)$  называется **нижней полурешеткой**, если для любой пары элементов множества  $x, y \in SL$  существуют инфимум  $\inf\{x, y\}$ .

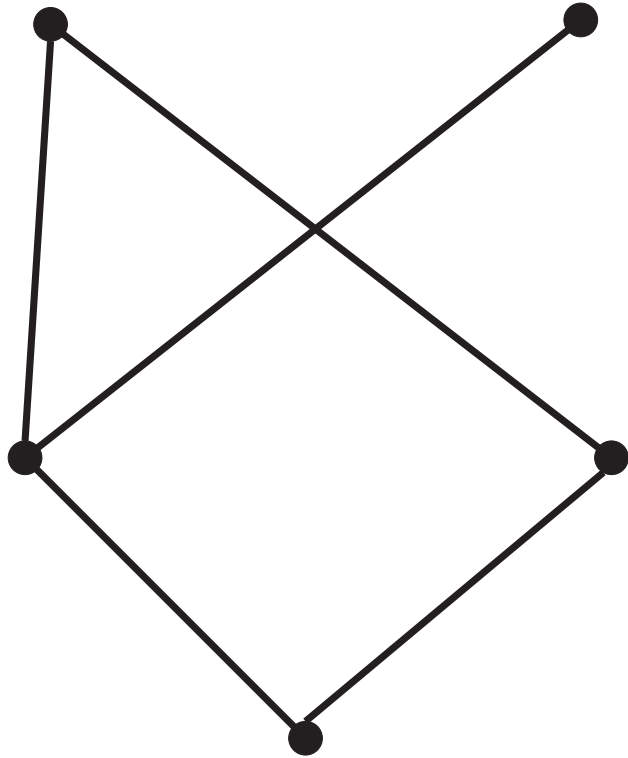
# Полурешетки. Примеры

нижняя полурешетка

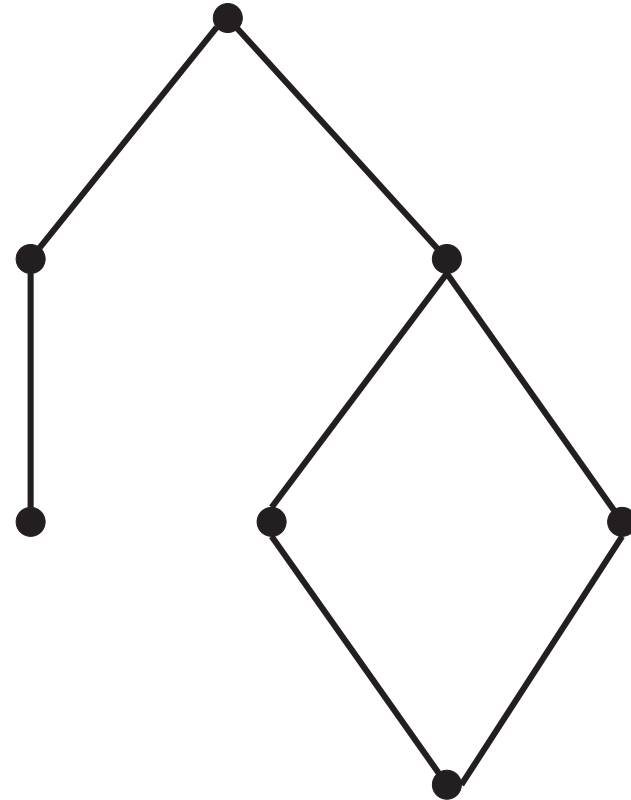


# Полурешетки. Примеры

нижняя полурешетка



верхняя полурешетка

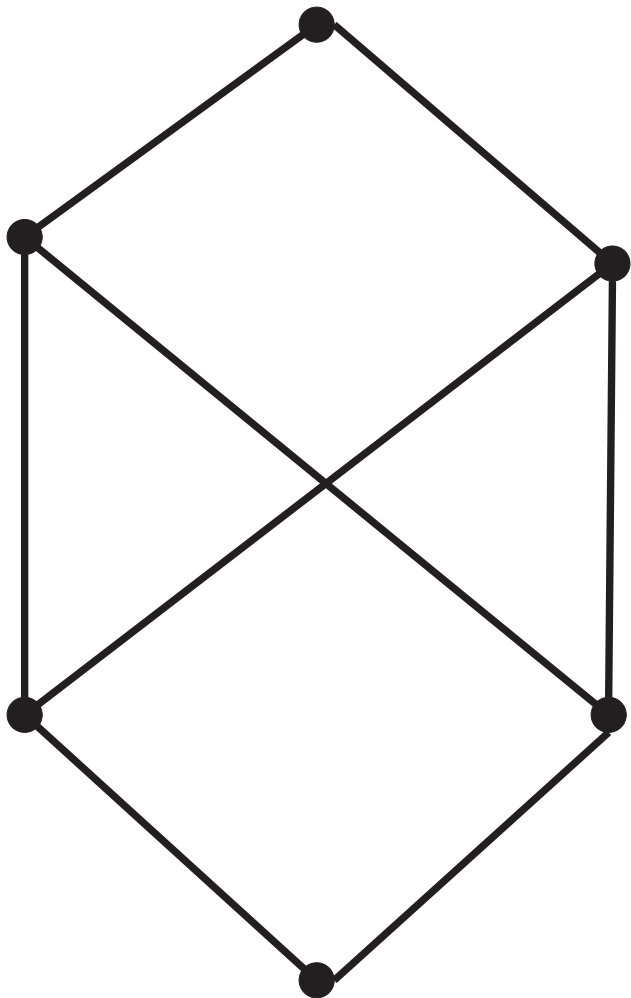


# Решетки

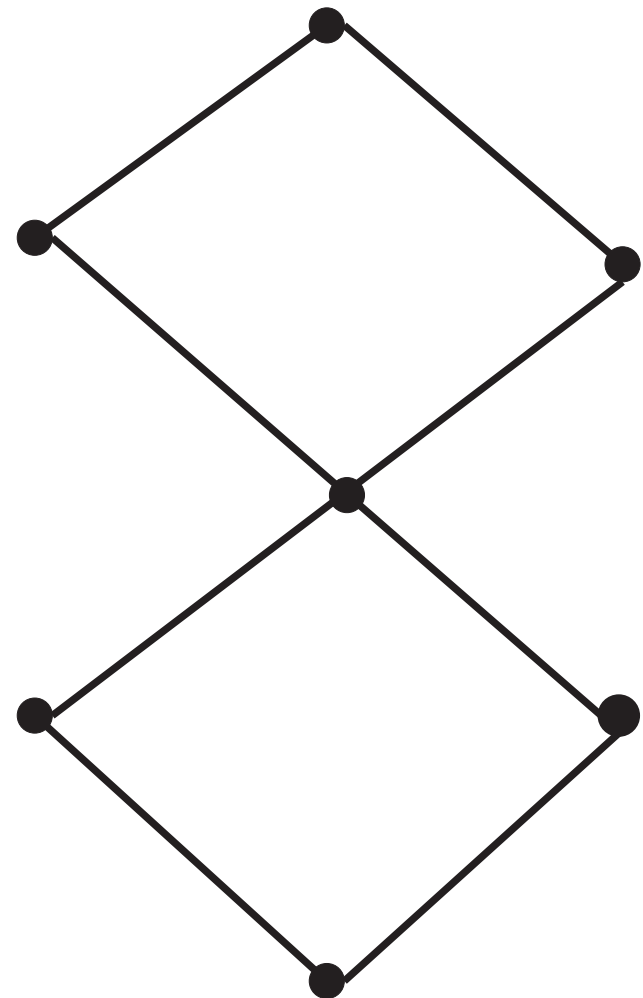
Частично-упорядоченное множество  $(L, \leq)$  называется **решеткой**, если для любой пары элементов  $x, y \in L$  существуют супремум  $\sup\{x, y\}$  и инфимум  $\inf\{x, y\}$ .

# Решетки. Примеры

частичный порядок не является не нижней и не верхней полурешеткой

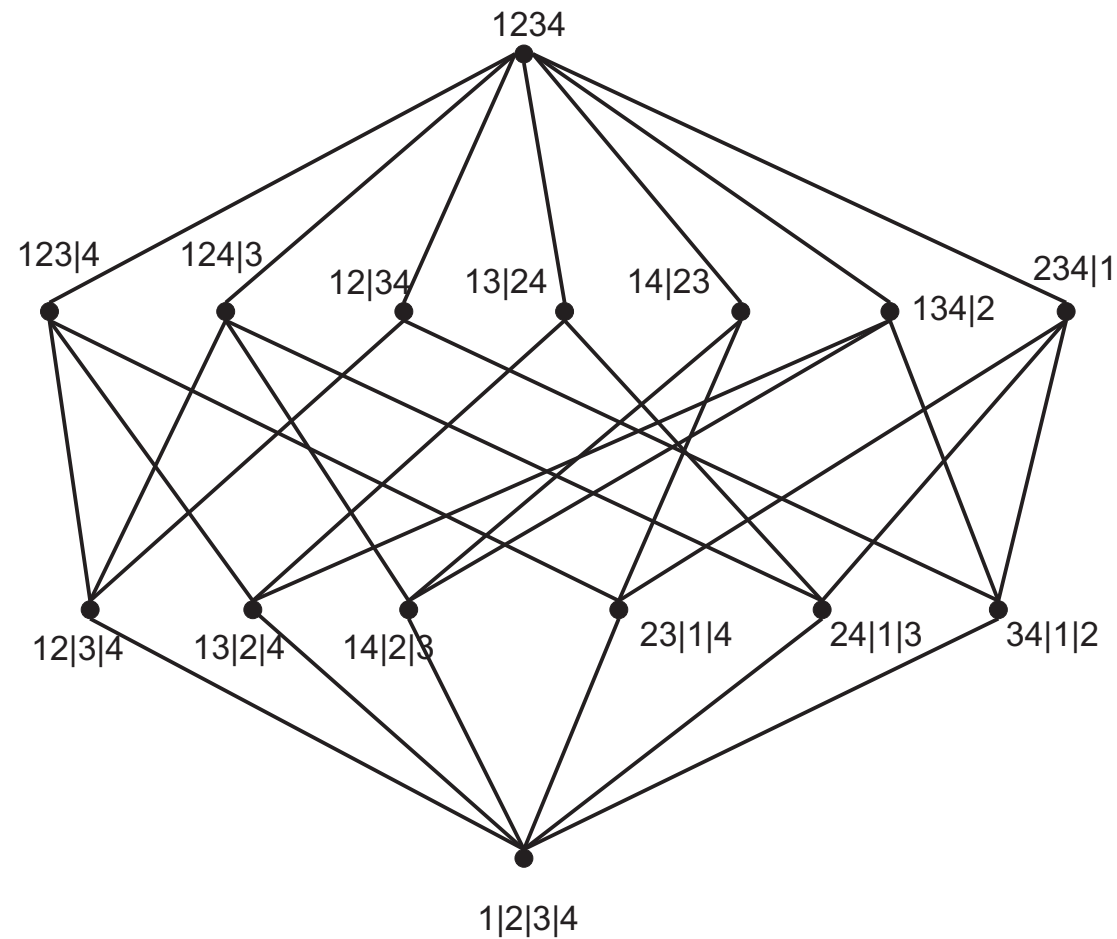


частичный порядок являющийся решеткой



# Решетка разбиений 4-х элементного множества

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$



# Решетка. Другое определение

**Теорема.** Произвольное множество  $L$  является решеткой относительно некоторого частичного порядка тогда и только тогда когда на нем заданы две операции  $\vee$  и  $\wedge$ , удовлетворяющие следующим свойствам для любых  $x, y, z \in L$ :

$$\text{L1 } x \vee x = x, \quad x \wedge x = x \quad (\text{идемпотентность})$$

$$\text{L2 } x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x \quad (\text{коммутативность})$$

$$\text{L3 } x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad (\text{ассоциативность})$$

$$\text{L4 } x = x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) \quad (\text{поглощение})$$

# Решетка. Другое определение

**Теорема.** Произвольное множество  $L$  является решеткой относительно некоторого частичного порядка тогда и только тогда когда на нем заданы две операции  $\vee$  и  $\wedge$ , удовлетворяющие следующим свойствам для любых  $x, y, z \in L$ :

$$\text{L1 } x \vee x = x, \quad x \wedge x = x \quad (\text{идемпотентность})$$

$$\text{L2 } x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x \quad (\text{коммутативность})$$

$$\text{L3 } x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad (\text{ассоциативность})$$

$$\text{L4 } x = x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) \quad (\text{поглощение})$$

Теорема позволяет рассматривать решетку как алгебру  $(L, \vee, \wedge)$  со свойствами L1-L4. **Естественным порядком** решетки, задаваемой таким образом, называется отношение “ $\leq$ ”  $\subseteq L \times L$ , определяемое как  $x \leq y \stackrel{\text{def}}{=} x \wedge y = x$  (или, эквивалентно,  $x \vee y = y$ ).

# Полные решетки

Решетка называется **полной** если у любого подмножества ее элементов (в том числе пустого) есть супремум и инфимум.

$$\bigvee \emptyset = \mathbf{0} \quad \bigwedge \emptyset = \mathbf{1}$$

Все конечные решётки полны.

Для произвольного подмножества элементов полной решетки можно писать

$$\bigvee X, \quad \bigwedge X$$

в силу ассоциативности и коммутативности операций  $\bigvee$  и  $\bigwedge$ .

# Принцип двойственности для решеток

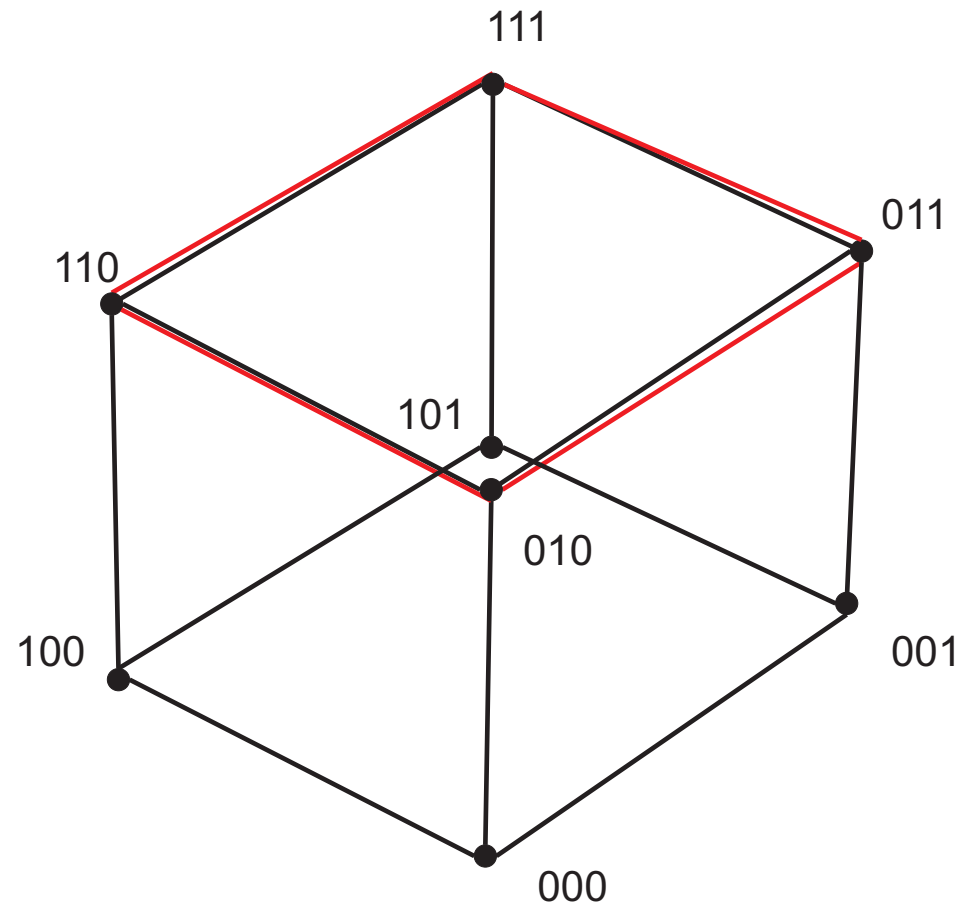
Утверждение о решетках, двойственное к данному можно получить, заменяя символы  $\leq$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $0$ ,  $1$  на  $\geq$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $1$ ,  $0$ .

Если множество  $(V, \leq)$  - (полная) решетка, то двойственное частично-упорядоченное множество  $(V, \leq)^d = (V, \geq)$  также является (полной) решеткой.

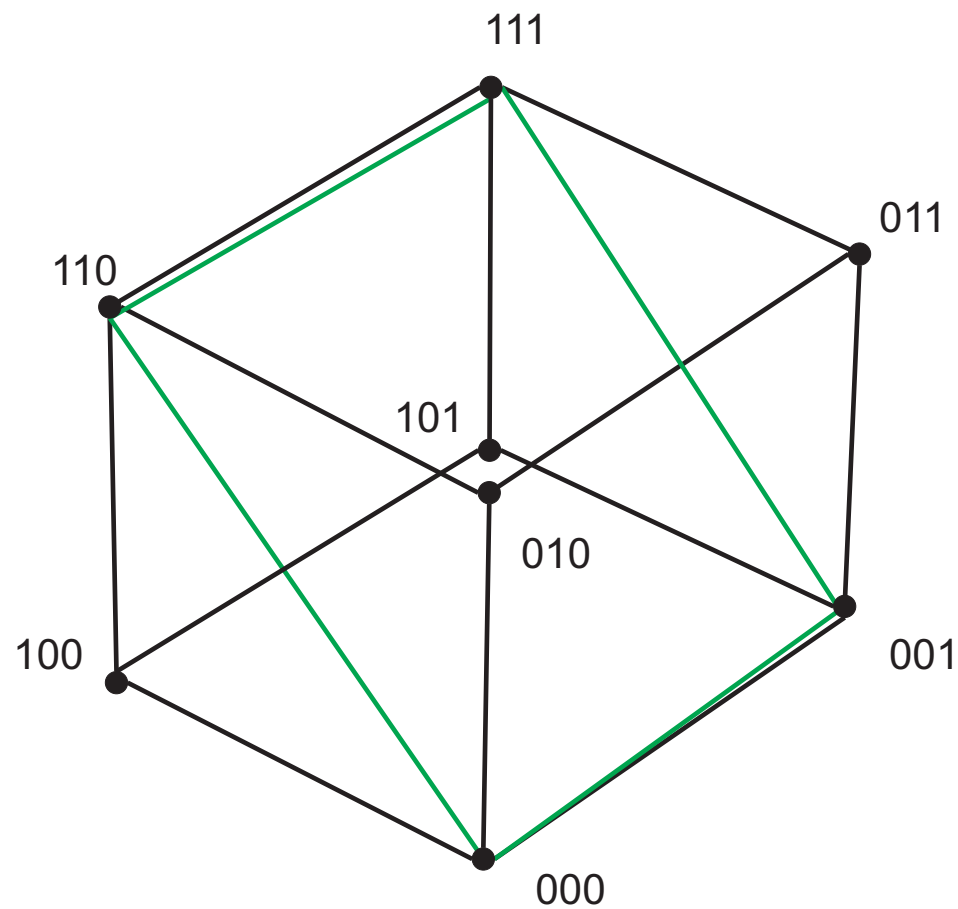
# Подрешетка

Тройка  $\mathcal{K} = (K, \wedge, \vee)$  есть **подрешетка** решетки  $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$  если  $K$  - непустое подмножество множества  $L$ , обладающее следующим свойством: из  $a, b \in K$  следует, что  $a \wedge b \in K$ ,  $a \vee b \in K$  ( $\wedge, \vee$  берутся в  $L$ ), а операции  $\wedge$  и  $\vee$  на  $K$  являются ограничениями операций и решетки  $\mathcal{L}$ .

# Булева решетка размерности 3 и ее подрешетка



# Булева решетка размерности 3 и ее подрешетка



# Морфизмы решеток

Отображение между двумя полными решетками **сохраняет супремумы** (является **супремум-морфизмом**) если

$$\varphi \bigvee X = \bigvee \varphi(X)$$

Двойственно для  $\wedge$ -морфизмов.

**Полный гомоморфизм** (**гомоморфизм полных решеток**) - отображение между двумя полными решетками, являющееся супремум- и инфинум-морфизмом.

**Изоморфизм полных решеток** - биективный полный гомоморфизм.

# Дистрибутивность

Решетка, в которой выполняются условия

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

называется **дистрибутивной**.

# Дистрибутивность

Решетка, в которой выполняются условия

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

называется **дистрибутивной**.

**Пример.** Кольцо множеств - семейство  $F$  подмножеств множества  $I$ , содержащее вместе с любыми двумя множествами  $S$  и  $T$  их теоретико-множественные пересечение  $S \cap T$  и объединение  $S \cup T$ .

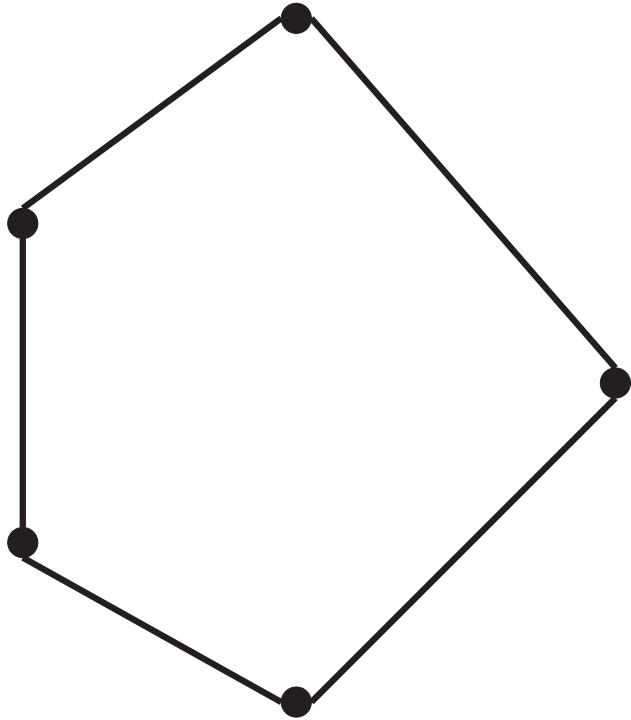
# Модулярность

Решетка, в которой выполняется условие

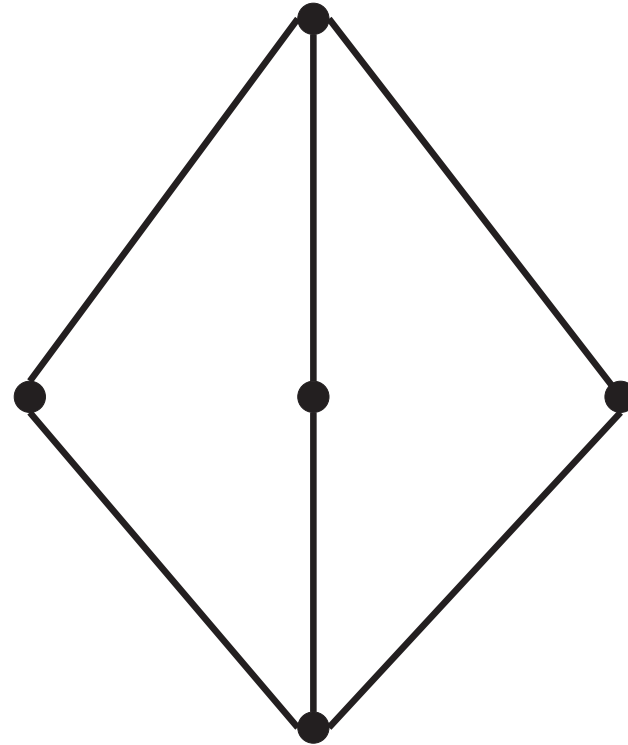
$$\text{если } x \leq z, \text{ то } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

называется **модулярной**.

# Пентагон и диамант



пентагон



диамант

Решетка  $L$  содержит пентагон (диамант) если в решетке найдется подрешетка, диаграмма которой - пентагон или диамант.

# Дистрибутивность и модулярность решеток

## Теорема.

1. Решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда ее диаграмма не содержит ни пентагона, ни диаманта
2. Решетка модулярна тогда и только тогда, когда ее диаграмма не содержит пентагона.

# Литература

Г. Биркгоф, *Теория решеток*, М., Наука, 1984. (Раздел 1.1)

Г. Биркгоф, Т.К. Барти, *Современная прикладная алгебра*, М., Лань, 2005. (Глава 2)

Г. Гретцер, *Общая теория решеток*, М., Мир, 1982.

B.A. Davey and H.A. Priestly, *Introduction to Lattices and Order (2nd edition)*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 2002.