Современная прикладная алгебра. Прикладная теория решеток.

С.О. Кузнецов

Тема 4. Формальный анализ понятий. Введение

Формальный Анализ Понятий. 1

[Wille 1982], [Ganter, Wille 1996]

Пусть даны множества G, M.

Пусть $I \subseteq G \times M$ - бинарное отношение между множествами G и M.

Тройка $\mathbb{K} := (G, M, I)$ называется **(формальным) контекстом**.

Интерпретация:

> M – множество **признаков**, G – множество **объектов**
>
> gIm или $(g, m) \in I \iff$ объект g обладает признаком m.

Формальный Анализ Понятий. 2

[Wille 1982], [Ganter, Wille 1996]

Дан контекст $\mathbb{K} := (G, M, I)$, рассмотрим отображения
$\varphi\colon 2^G \to 2^M$ и $\psi\colon 2^M \to 2^G$:

$$\varphi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \mid gIm \text{ для всех } g \in A\}, \psi(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gIm \text{ для всех } m \in B\}.$$

Для любых $A_1, A_2 \subseteq G$, $B_1, B_2 \subseteq M$

1. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \varphi(A_2) \subseteq \varphi(A_1)$
2. $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \psi(B_2) \subseteq \psi(B_1)$
3. $A_1 \subseteq \psi\varphi(A_1)$ и $B_1 \subseteq \varphi\psi(B_1)$

Отображения φ и ψ задают **соответствие Галуа** между $(2^G, \subseteq)$ и $(2^M, \subseteq)$.

Формальный Анализ Понятий. 3

[Wille 1982], [Ganter, Wille 1996]

Пусть дан контекст $\mathbb{K} := (G, M, I)$. По традиции ФАП вместо φ и ψ используется единое обозначение $(\cdot)'$, так что для произвольных $A \subseteq G$, $B \subseteq M$

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \mid gIm \text{ для всех } g \in A\}, \quad B' \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gIm \text{ для всех } m \in B\}.$$

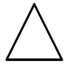
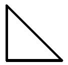
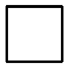
(Формальное) понятие есть пара (A, B):

$$A \subseteq G,\ B \subseteq M,\ A' = B, \ \text{ и } \ B' = A.$$

A называется **(формальным) объемом**, а B называется **(формальным) содержанием** понятия (A, B).

Понятия частично-упорядочены отношением
$(A_1, B_1) \geq (A_2, B_2) \iff A_1 \supseteq A_2 \quad (B_2 \supseteq B_1)$.

Пример. Контекст

	G \ M	a	b	c	d
1		$\times$			$\times$
2		$\times$		$\times$	
3			$\times$	$\times$	
4			$\times$	$\times$	$\times$

Объекты:

1 – равносторонний треугольник

2 – прямоугольный треугольник,

3 – прямоугольник,

4 – квадрат,

Признаки:

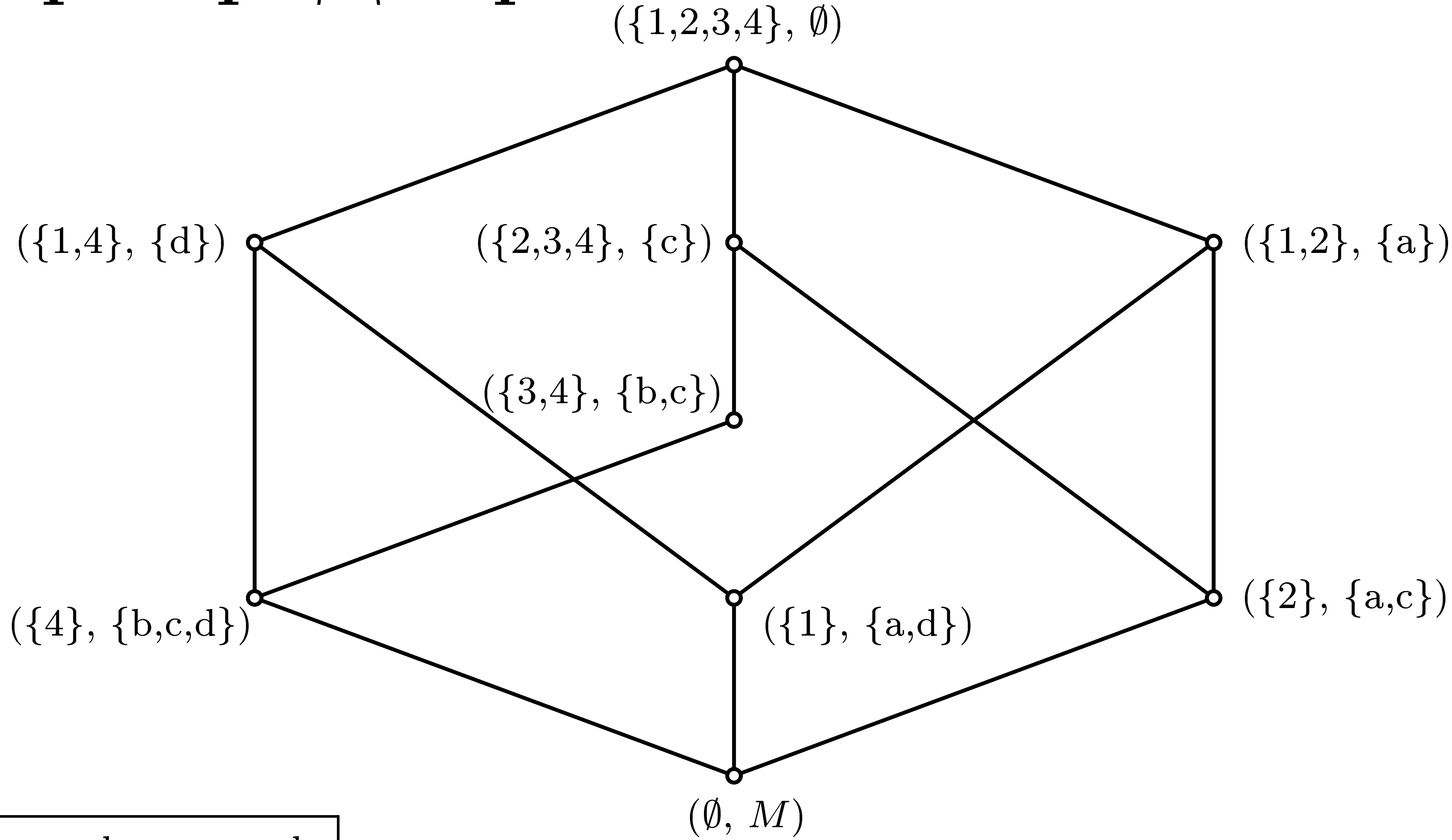
a – ровно 3 вершины,

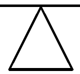
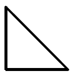
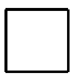
b – ровно 4 вершины,

c – имеет прямой угол,

d – все стороны равны

Пример. Диаграмма ч.п. на понятиях



	G \ M	a	b	c	d
1		×			×
2		×		×	
3			×	×	
4			×	×	×

a – ровно 3 вершины,

b – ровно 4 вершины,

c – имеет прямой угол,

d – все стороны равны

Свойства операций $(\cdot)'$

Пусть (G, M, I) - формальный контекст, $A, A_1, A_2 \subseteq G$ - множества объектов, $B \subseteq M$ - множество признаков, тогда

1. Если $A_1 \subseteq A_2$, то $A_2' \subseteq A_1'$;
2. Если $A_1 \subseteq A_2$, то $A_1'' \subseteq A_2''$
3. $A \subseteq A''$
4. $A''' = A'$ (а следовательно, $A'''' = A''$);
5. $(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2'$;
6. $A \subseteq B' \Leftrightarrow B \subseteq A' \Leftrightarrow A \times B \subseteq I$.

Аналогично для подмножеств признаков.

Оператор замыкания на множестве

Оператором замыкания на множестве G называется отображение $\varphi\colon \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$, которое каждому подмножеству $X \subseteq G$ сопоставляет его **замыкание** $\varphi X \subseteq G$, обладающее следующими свойствами:

1. $\varphi\varphi X = \varphi X$ (**идемпотентность**)
2. $X \subseteq \varphi X$ (**экстенсивность**)
3. $X \subseteq Y \Rightarrow \varphi X \subseteq \varphi Y$ (**монотонность**)

Элемент $X \subseteq G$ называется **замкнутым** если $\varphi X = X$.

Пример. Пусть дан контекст (G, M, I), тогда операторы $(\cdot)''\colon 2^G \to 2^G$, $(\cdot)''\colon 2^M \to 2^M$ являются операторами замыкания.

Супремум- и инфинум-плотные подмножества

Подмножество $X \subseteq L$ элементов решетки $(L, \leq)$ называется **супремум-плотным**, если любой элемент решетки $v \in L$ представим как

$$v = \bigvee \{x \in X \mid x \leq v\}.$$

Двойственно для **инфинум-плотных** подмножеств.

Основная теорема Формального Анализа Понятий

[Wille 1982], [Ganter, Wille 1996]

Решетка понятий $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ есть полная решетка. Для произвольного множества формальных понятий

$$\{(A_j, B_j) \mid j \in J\} \subseteq \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$$

точные нижняя и верхняя грани задаются как

$$\bigwedge_{j \in J} (A_j, B_j) = (\bigcap_{j \in J} A_j, (\bigcup_{j \in J} B_j)''),$$

$$\bigvee_{j \in J} (A_j, B_j) = ((\bigcup_{j \in J} A_j)'', \bigcap_{j \in J} B_j).$$

Полная решетка V изоморфна решетке $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ тогда и только тогда когда существуют отображения $\gamma\colon G \to V$ и $\mu\colon M \to V$ такие, что $\gamma(G)$ супремум-плотно в V, $\mu(M)$ инфимум-плотно в V, а $gIm \Leftrightarrow \gamma g \leq \mu m$ для всех $g \in G$ и всех $m \in M$. В частности, $V \cong \underline{\mathfrak{B}}(V, V, \leq)$.

Неразложимые элементы решетки

Пусть $(L, \leq)$ - полная решетка. Элемент $x \in L$ называется **супремум-неразложимым**, если

$$x \neq \bigvee \{y \mid y < x\}.$$

Двойственно, элемент $x \in L$ называется **инфинум-неразложимым**, если

$$x \neq \bigwedge \{y \mid y > x\}.$$

Множества супремум- и инфинум-неразложимых элементов решетки $(L, \leq)$ обозначаются, соответственно, через $J(L)$ и $M(L)$.
Множество $J(L)$, а также любое его надмножество - супремум-плотные.
Множество $M(L)$, а также любое его надмножество - инфинум-плотные.
Из основной теоремы ФАП следует, что

$$L \cong \underline{\mathfrak{B}}(J(L), M(L), \leq).$$

Редуцирование признаков

Признак $m \in M$, $\mathbb{K} = (G, M, I)$, **редуцируем** если

$$m' = G \text{ или } m' = \bigcap \{n' \mid n \in M \ \& \ n' \supset m'\}$$

Если m – редуцируем, то $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \cong \underline{\mathfrak{B}}(G, M \setminus \{m\}, I \cap (G \times (M \setminus \{m\})))$

Двойственно для объектов. Нередуцируемый признак соответствует инфинум-неразложимому элементу решетки, а нередуцируемый объект - супремум-неразложимому элементу решетки.

Пример. Признак m_k редуцируем, так как $m_k' = m_i' \cap m_j'$

$G \setminus M$	$\ldots$	m_i	$\ldots$	m_j	$\ldots$	m_k	$\ldots$
g_1	$\ldots$	$\times$	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$
g_2	$\ldots$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\ldots$
g_3	$\ldots$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\ldots$
g_4	$\ldots$		$\ldots$	$\times$	$\ldots$		$\ldots$

Принцип двойственности для решеток понятий

Пусть (G, M, I) - формальный контекст, тогда (M, G, I^{-1}) - также формальный контекст. Имеет место

$$\underline{\mathfrak{B}}(M, G, I^{-1}) \cong \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)^d,$$

а отображение $(B, A) \rightarrow (A, B)$

задает изоморфизм: меняя местами объекты и признаки, мы получаем двойственную решетку понятий.

Импликации на подмножествах признаков

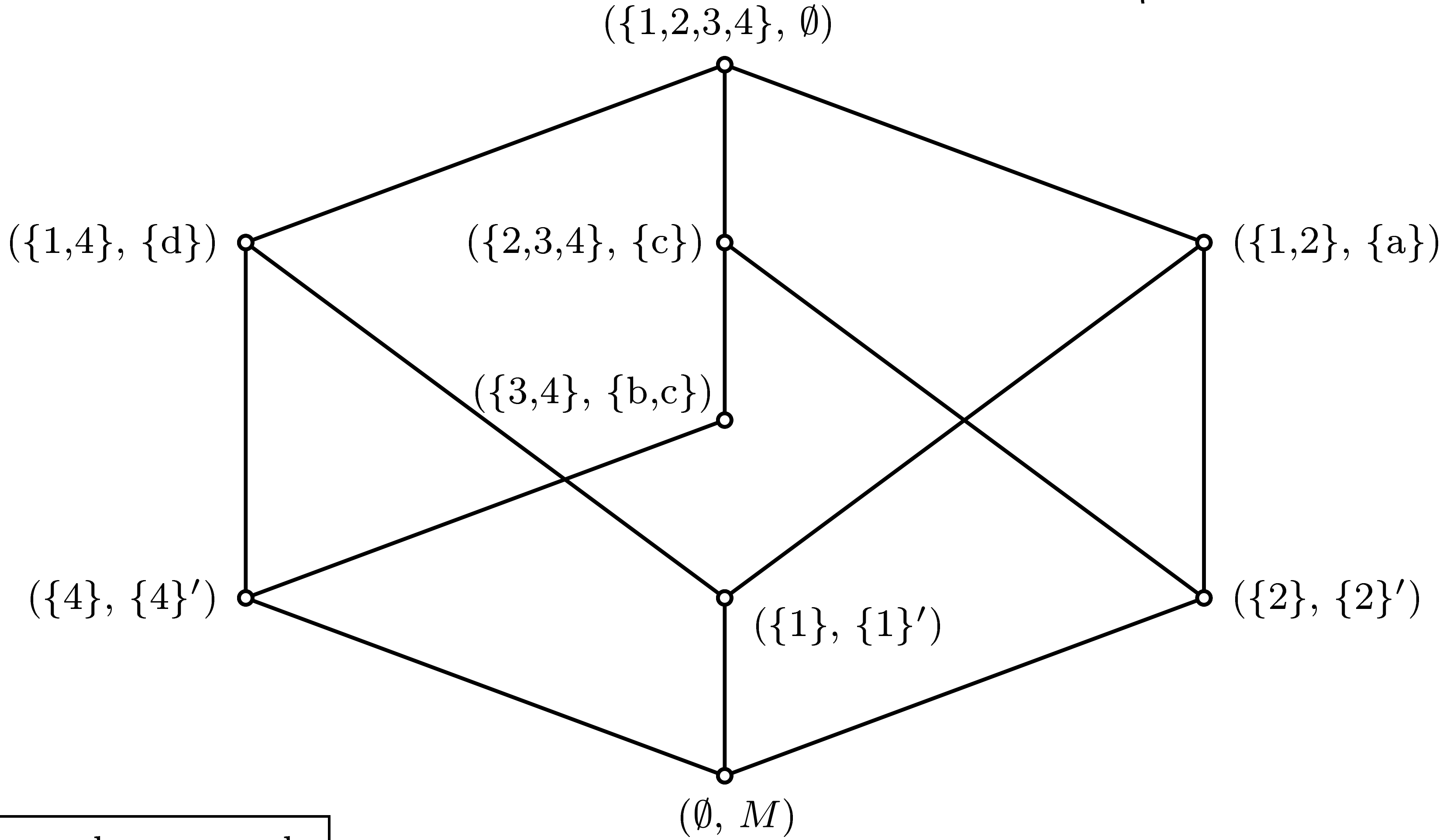
Импликация $A \to B$, где $A, B \subseteq M$, имеет место если $A' \subseteq B'$, т.е. каждый объект, обладающий всеми признаками из множества A, также обладают всеми признаками из множества B.

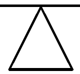
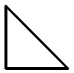
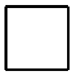
Импликации и решетка понятий: Если $A \to B$, то инфимум всех признаковых понятий признаков из A в диаграмме решетки понятий лежит ниже инфимума всех признаковых понятий признаков из B.

Импликации удовлетворяют **правилам Армстронга**:

$$\frac{}{X \to X}\quad , \quad \frac{X \to Y}{X \cup Z \to Y}\quad , \quad \frac{X \to Y, Y \cup Z \to W}{X \cup Z \to W},$$

Решетка понятий и импликации



	G \ M	a	b	c	d
1		×			×
2		×		×	
3			×	×	
4			×	×	×

a – ровно 3 вершины,
b – ровно 4 вершины,
c – имеет прямой угол,
d – все стороны равны

Импликации

$abc \to d$

$b \to c$

$cd \to b$

Генераторный базис импликаций

Подмножество признаков $D \subseteq M$ есть **генератор** замкнутого подмножества признаков $B \subseteq M$, $B'' = B$ если $D \subseteq B$, $D'' = B = B''$.
Подмножество $D \subseteq M$ есть **минимальный генератор**, если для любого $E \subset D$ имеет место $E'' \neq D'' = B''$.
Генератор $D \subseteq M$ называется **нетривиальным** если $D \neq D'' = B''$.
Множество всех нетривиальных минимальных генераторов B обозначим $\mathrm{nmingen}(B)$.

Генераторный базис импликаций выглядит следующим образом:
$\{F \to (F'' \setminus F) \mid F \subseteq M, F \in \text{ nmingen } (F'')\}$.

Минимальный базис импликаций

Базис Дюкенна-Гига (Duquenne-Guigues base): минимальное по размеру множество импликаций, из которого с помощью аксиом Армстронга выводимы все импликации контекста.
Подмножество признаков $P \subseteq M$ называется **псевдосодержанием** если $P \neq P''$ и для любого псевдосодержания Q такого что $Q \subset P$ имеет место $Q'' \subset P$.

Базис Дюкенна-Гига выглядит следующим образом:
$\{P \to (P'' \setminus P) \mid P$ - псевдосодержание $\}$.

Литература

B. Ganter and R. Wille, *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*, Springer, 1999.

B.A. Davey and H.A. Priestly. *Introduction to Lattices and Order (2nd edition)*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 2002.