ВШЭ, 2011/2012
3 курс, ЭКОНОМЕТРИКА
П.К.Катышев

Лекция 1 21.01.11

Возникновение теории вероятностей относят обычно к XVII веку. Связано с именами Ферма, Гюйгенса, Паскаля; в более развитой форме – Якоб Бернулли, Лаплас, Гаусс и др.

Первое руководство по теории вероятностей – трактат Гюйгенса «О расчетах в азартной игре», 1657 г. Впервые вводится понятие математического ожидания. Трактат позднее был включен Якобом Бернулли в книгу «Искусство предположения», опубликованную уже после смерти автора в 1713 г. Первая предельная теорема – закон больших чисел.

Более систематическое развитие в XIX и XX вв. Имена: Чебышев, Марков, Колмогоров.

1. ***Понятие статистического ансамбля (эксперимент со случайным исходом)***

- "принципиальная" недетерминированность исхода
- возможность (по крайней мере, теоретическая) многократного повторения
- знание множества всех возможных исходов

2. ***Вероятностное пространство.***

1) Пространство элементарных исходов (ПЭИ) Ω – множество произвольной природы (абстрактное множество).
2) Множество событий $\mathcal{A}$ – система подмножеств ПЭИ Ω, образующая σ-алгебру.

Определение. Система $\mathcal{A}$ называется *σ-алгеброй множеств (событий)*, если

(1) $\Omega, \varnothing \in \mathcal{A}$.

(2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

(3) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

3) Вероятность – числовая функция на $\mathcal{A}$, т.е. $\forall A \in \mathcal{A} \to P(A)$, обладающая следующими свойствами:

(1) $0 \le P(A) \le 1 \ \ \forall A \in \mathcal{A}$;

(2) $P(\Omega) = 1, \ P(\varnothing) = 0$;

(3) Счетная (или σ-) аддитивность: если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$,

$A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \ne j$ то $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Нетрудно проверить, что

- выполнено свойство монотонности: $A, B \in \mathcal{A}, \ A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$;
- выполнено свойство конечной аддитивности: если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$,

  $A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \ne j$ то $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Определение. Набор(Ω, $\mathcal{A}$, P) где Ω – вероятностное, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра его подмножеств, и P – вероятность, называется вероятностным пространством.

Примеры

1. Дискретное вероятностное пространство. Пространство Ω конечное или счетное множество, $\mathcal{A}$ – множество всех подмножеств, $p_i = \Pr\{\omega_i\}$, (1) $p_i \geq 0$; (2) $\sum_i p_i = 1$. Вероятность любого события есть $\Pr(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$.

Часто набор чисел $p_i = \Pr\{\omega_i\}$, удовлетворяющих условиям (1) и (2), называют распределением на Ω.

Частный случай – так называемая *классическая схема* или *классическая вероятность*: пространство. Ω конечно, $|\Omega| = n$ и все элементарные исходы равновероятны (и, следовательно, имеют вероятность $1/n$). В этом случае нахождение вероятности любого события сводится к подсчету числа элементарных исходов, составляющих это событие.

Пример. В доме 11 этажей. На первом этаже в лифт зашли 10 человек. Каждый из них равновероятно и независимо от остальных может выйти на любом из десяти этажей. Чему равна вероятность того, что все 10 человек выйдут на разных этажах?

Решение. Любой элементарный исход может быть представлен последовательностью $\omega = (n_1,...,n_{10})$, где n_i – номер этажа, на котором выходит i–й человек, $i = 1,...,10$. Каждое число n_i может принимать любое значение 2, 3,…, 11 независимо от стальных значений n_j. Поэтому общее число исходов $\#\Omega = 10^{10}$. По условию задачи можно считать все исходы равновероятными. Благоприятствующими являются те исходы $\omega = (n_1,...,n_{10})$, у которых все числа $n_1,...,n_{10}$ разные, т.е. когда $n_1,...,n_{10}$ представляет перестановку чисел 2, 3,…, 11. Число таких перестановок равно 10!. Искомая вероятность равна

$$P = \frac{10!}{10^{10}} = 0.000363.$$

Примеры классических вероятностных схем

1. n-кратное подбрасывание монеты, $\Omega = \{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)\}$, $|\Omega| = 2^n$.
2. n-кратное подбрасывание игрального кубика, $\Omega = \{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)\}$, $\varepsilon_i = 1,2,3,4,5,6$, $|\Omega| = 6^n$.
3. Размещение k различимых шаров по n ящикам, $\Omega = \{(r_1,...,r_k)\}, r_i$ – номер ящика для i-го шара, $|\Omega| = n^k$. В эту схему укладывается много «содержательных задач»:

- лифте k человек, в доме n этажей (люди − шары, этажи − ящики)
- распределение дней рождения (люди − шары, дни рождения − ящики, $n = 365$).

Однако невозможно ограничится только дискретными вероятностными пространствами. Примеры экспериментов, для которых пространство элементарных исходов несчетно, «непрерывно»:

- время ожидания автобуса, курсирующего с интервалом 10 минут, $\Omega = [0,10]$;
- результат измерения длины предмета, $\Omega = [a,b]$;
- время безотказной работы прибора, $\Omega = [0,+\infty)$;
- общий семейный доход и расход на питание, $\Omega = [0,+\infty)\times[0,+\infty) = R_+^2$.

Пример «смешанного» пространства − время ожидания на перекрестке.

Условная вероятность. Формула полной вероятности, формула Байеса.

Определение. Условная вероятность $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $(P(B)>0)$.

"Естественность" определения на примере классической вероятности.

Условная вероятность. Примеры.

1. 15% процентов студентов РЭШ получили "отлично" на экзамене по теории вероятностей, причем среди всех студентов юношей-отличников 5%. Какова вероятность, что студент-отличник – юноша?
A = {наугад выбранный студент – юноша}, B = {этот студент – отличник},
P(B) = 0.15, P(AB) = 0.05, $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = 1/3$.

2. Рассматриваются семьи с двумя детьми. Какова вероятность, что в семье оба мальчики, если известно, что в семье есть мальчик?
A=(мм), B={(мм), (мд), дм)}, P(A|B) = 1/3.

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Определение. Система событий $H_1,\ldots,H_n,\ldots$ (конечная или счетная) образует полную группу событий, если 1)$\bigcup H_i = \Omega$, 2) $H_i \cap H_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Предложение (формула полной вероятности). Пусть события $H_1,\ldots,H_n,\ldots$ образуют полную группу. Тогда для любого события A выполнено равенство

$$P(A) = \sum_i P(A\,|\,H_i)\,P(H_i)$$

(1)

Доказательство. Обозначим $B_i = A\cap H_i$, $i = 1,\ldots,n,\ldots$. В силу 1) $A = \bigcup B_i$, а в силу 2) $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$. Из аддитивности вероятности и определения следует (1).

Примеры

1. Два станка изготавливают одну и ту же деталь. Первый станок изготавливает 60%, брак составляет 3%, второй –40% и 5%. Какова вероятность, что наугад выбранная деталь окажется бракованной? Пусть A = {деталь бракованная}, H_1={деталь изготовлена на первом станке}, H_2={деталь изготовлена на втором станке}. Тогда $\Pr(A) = \Pr(A\,|\,H_1)\Pr(H_1) + \Pr(A\,|\,H_2)\Pr(H_2) = 0.038$.

Продолжение: наугад выбранная деталь оказалась бракованная, Какова вероятность, что она выпущена первым станком?

$$\Pr(H_1 \mid A) = \frac{\Pr(A \mid H_1)\Pr(H_1)}{\Pr(A \mid H_1)\Pr(H_1) + \Pr(A \mid H_2)\Pr(H_2)} = 0.474$$

Независимость.

Событие A не зависит от события B, если P(A|B) = P(A).$\Rightarrow$
P(A) P(B) = P($A \cap B$) – это удобнее взять в качестве определения.

Определение. Событие A не зависит от события B, если P(A) P(B) = P($A \cap B$) $\Rightarrow$ независимость – свойство взаимное.

Определение. Событие A не зависит от события B, если P(A) P(B) = P($A \cap B$) $\Rightarrow$ независимость – свойство взаимное.

Примеры

1. Подброшены два кубика. Известно, что сумма четна, Чему равна вероятность того, что на первом кубике не меньше трех очков? Пусть X – число очков на первом кубике, Y – на втором. Пусть

$$A = \{X \ge 3\},\ \ B = \{X + Y\ \ \textit{четно}\}.$$

Тогда

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{3 \cdot 1/36 + 3 \cdot 1/36 + 3 \cdot 1/36 + 3 \cdot 1/36}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Очевидно, что $\Pr(A) = \dfrac{2}{3}$, т.е. A и B независимы.

2. Из колоды вытаскивается одна карта, A = {дама}, B = {пика},

$$P(A) = \frac{4}{36},\ \ P(B) = \frac{1}{4},\ \ P(AB) = \frac{1}{36} = P(A)P(B).$$

Определение. Пусть $A_\gamma,\ \gamma \in \Gamma$ – некоторое семейство случайных событий. Это семейство называется независимым (в совокупности), если $P\left(A_{\gamma_1} \cap \ldots \cap A_{\gamma_n}\right) = P(A_{\gamma_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{\gamma_n})$ для любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$.

Из независимости следует попарная независимость, обратное неверно.

Пример. Подбрасывается правильный тетраэдр, одна грань которого выкрашена в красный цвет (К), другая – в черный (Ч), третья – в белый (Б), а четвертая – во все три цвета К, Ч, Б. События К и Ч, Б и Ч, К и Б независимы:
$\Pr(К \cdot Ч) = \dfrac{1}{4} = \Pr(К)\Pr(Ч)$, и т.д., но $\Pr(К \cdot Ч \cdot Б) = \dfrac{1}{4} \ne \Pr(К)\Pr(Ч)\Pr(Б) = \dfrac{1}{8}$.