

Лекция 2

06.02.2012

Случайные величины

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) .

Определение. Числовая функция $\xi : \Omega \rightarrow R$ называется измеримой, если для любого борелевского множества B множество $\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ (т.е. прообраз множества B) принадлежит сигма-алгебре F .

Определение. Измеримая числовая функция $\xi : \Omega \rightarrow R$ называется случайной величиной.

Таким образом, если задана случайная величина ξ , то определены вероятности событий $(\xi \leq c)$, $(\xi \in [a, b])$ и т.д.

Упражнения (для любителей аналитики и абстрактных рассуждений).

1) Пусть $X : \Omega \rightarrow R$ – числовая функция на Ω . Функция X является случайной величиной тогда и только тогда, когда для любого числа c множество $\{\omega : X(\omega) \leq c\}$ принадлежит сигма-алгебре F .

2) Пусть $f : R \rightarrow R$ – непрерывная функция и ξ – случайная величина. Тогда функция $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$ является случайной величиной.

Дискретные случайные величины. Полное описание вероятностного поведения дискретной случайной величины дается с помощью ее распределения:

X	x_1	x_2	\dots	x_n	\dots
$P(X)$	p_1	p_2	\dots	p_n	\dots

где x_1, \dots, x_n, \dots – все возможные значения величины X , $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, \dots, n, \dots$ – вероятности, с которыми принимается каждое значение. (Множество значений дискретной случайной величины может быть конечным или счетным.) Ясно, что на числа x_1, \dots, x_n, \dots не накладываются никакие ограничения, а для p_i должны выполняться соотношения:

1) $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n, \dots$; 2) $\sum_i p_i = 1$.

Примеры дискретных сл. в. (дискретных распределений)

1. Бернуллиевская сл.в. (распределение)

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q=1-p & p \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

2. Биномиальная сл. в. (распределение). Пусть проводится серия n независимых опытов, каждый из которых может (случайно) иметь два исхода – «успех» (1) или «неудача» (0), причем вероятность успеха в каждом опыте одна и та же и равна p , $0 \leq p \leq 1$ (10-кратное подбрасывание монеты, «успех» – герб; опрос 200 наугад выбранных людей, «успех» – человек выступает за законопроект об ограничении курения; и т.д.). Пространство элементарных исходов: $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = 0$, если в i -м опыте неудача и 1, если успех.

Вероятность: $P(\omega) = p^{\sum \varepsilon_i} q^{n - \sum \varepsilon_i}$ (независимость).

Случайная величина $B(\omega) = \sum_i \varepsilon_i$ (общее число успехов в n испытаниях) называется

биномиальной сл.в. с параметрами (n, p) . Нетрудно получить, что

$p_k = P(B = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$. Пусть X – общее число успехов в этих n испытаниях.

Случайная величина X называется *биномиальной* случайной величиной, а ее распределение – *биномиальным* распределением. Ясно, что X может принимать значения $0, \dots, n$, и можно показать, что

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, и это число называется числом *сочетаний* из n предметов по k . Его

комбинаторный смысл следующий: число C_n^k есть число различных неупорядоченных выборок объема k из n различных предметов. Это то же самое, что и число различных подмножеств, состоящих из k элементов, множества, содержащего n элементов.

3. Геометрическая сл.в. (распределение). X – число опытов до появления первого успеха в схеме Бернулли.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p & qp & \dots & q^{n-1}p & \dots \end{pmatrix}.$$

4. Гипергеометрическая сл.в. (распределение)

В партии, состоящей из N изделий, имеется M бракованных. Наудачу выбираются n изделий из этой партии ($n < N$). Общее число бракованных изделий X называется гипергеометрической сл.в. с параметрами (N, M, n) .

Из комбинаторных соображений получаем:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad 0 \leq m \leq n < M$$

5. Пуассоновское распределение с параметром λ :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Число заявок на обслуживание в единицу времени, число элементарных частиц, фиксируемых датчиком и т.д. можно моделировать пуассоновским распределением.

Функция распределения

Распределение случайной величины – это совокупность вероятностей

$P\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$, где B – произвольное измеримое подмножество числовой прямой (в частности любой отрезок, интервал, точка, счетное объединение, пересечение отрезков и т.д.). Оказывается для однозначного определения распределения достаточно знать функцию распределения.

Функция распределения – универсальное описание вероятностной структуры сл.величины.

Пусть ξ – некоторая случайная величина.

Определение. Числовая функция $F(x) = F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}$, $x \in R$ называется функцией распределения сл.в. X .

Свойства функции распределения

1) $0 \leq F(x) \leq 1$ для любого x – очевидно.

- 2) $F(x)$ – неубывающая функция. Действительно, если $x_1 < x_2$, то $(\xi \leq x_1) \subseteq (\xi \leq x_2)$ и $F(x_1) = P(\xi \leq x_1) \leq P(\xi \leq x_2) = F(x_2)$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Содержательно понятно, а строгое доказательство основано на непрерывности вероятности.
- 4) $F(x)$ непрерывна справа, т.е. $\lim_{y \rightarrow x^+} F(y) = F(x)$.

В общей теории доказывается

Теорема. Пусть некоторая функция $F(x)$ удовлетворяет условиям 1)–4). Тогда существует вероятностное пространство и случайная величина ξ на нем, такие что $F_\xi(x) = F(x)$.

Нетрудно проверить, что для дискретной случайной величины функция распределения является ступенчатой.

Плотность распределения (функция плотности)

Определение. Если функция распр. сл.в. непрерывна на всей числовой прямой и непрерывно дифференцируема всюду за исключением конечного числа точек, то функция $f(x) = F'(x)$ называется плотностью распределения.

Свойства плотности.

$$1) f(x) \geq 0; \quad 2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Распределение восстанавливается по плотности: $P(\xi \in A) = \int_A f(x) dx$.

Так же, как и для функции распределения, справедлива

Теорема. Если некоторая функция $f(x)$, $x \in R$ удовлетворяет условиям 1) и 2), то существует случайная величина ξ , для которой эта функция является плотностью распределения.