

### Плотность распределения (функция плотности)

**Определение.** Если функция распр. сл.в. непрерывна на всей числовой прямой и непрерывно дифференцируема всюду за исключением конечного числа точек, то функция  $f(x) = F'(x)$  называется плотностью распределения.

Свойства плотности.

$$1) f(x) \geq 0; \quad 2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Распределение восстанавливается по плотности:  $P(\xi \in A) = \int_A f(x)dx$ .

Так же, как и для функции распределения, справедлива

**Теорема.** Если некоторая функция  $f(x)$ ,  $x \in R$  удовлетворяет условиям 1) и 2), то существует случайная величина  $\xi$ , для которой эта функция является плотностью распределения.

### Примеры непрерывных случайных величин

1. Равномерная на отрезке  $[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0 \text{ – параметр.}$$

3. Нормальная (гауссовская) сл.в.,  $X \sim N(m, \sigma^2)$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

### Числовые характеристики случайных величин

1. Среднее значение (математическое ожидание)

Пусть  $X$  – дискретная или непрерывная сл.в.

**Определение.** Средним значением или математическим ожиданием сл.в.  $X$  называется интеграл Лебега

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega).$$

В общей теории доказывается, что для любой ограниченной случайной величины  $X$  (измеримой функции) на  $(\Omega, F, P)$  можно корректно определить такой интеграл, причем будут выполняться привычные свойства интеграла – линейность и неотрицательность. Можно показать, что

$$\text{для дискретной сл.в. } E(X) = \sum x_i P(X = x_i);$$

для непрерывной сл.в.  $E(X) = \int_R xf(x)dx$

Пусть  $X$  – случайная величина, имеющая (для простоты) плотность распределения  $f_X(x)$  и пусть  $h: R \rightarrow R$  – измеримая функция. Обозначим  $Y = h(X)$ . Тогда можно показать, что  $E(Y) = \int_R h(x)f_X(x)dx$  (теорема о замене переменных в интеграле Лебега).

### Свойства математического ожидания

1. Линейность:  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ .
2. Неотрицательность: если  $X \geq 0$  (п.н.), то  $E(X) \geq 0$ .

**Упражнение.** Пусть  $X \geq 0$  (п.н.) и  $E(X) = 0$ . Тогда  $X = 0$  (п.н.)

### 2. Дисперсия

**Определение.** Число  $V(X) = E[(X - m)^2]$ , где  $m = E(X)$  называется дисперсией сл.в.  $X$ .

Из теоремы о замене переменных получаем, что  $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f_X(x)dx$ , если сл.в. имеет плотность  $f_X(x)$ .

### Свойства дисперсии

1.  $V(X) \geq 0$ ;  $V(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$  (п.н.)
2.  $V(aX + b) = a^2V(X)$

### Примеры

- 1) Бернуллиевская сл. в.  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ ,  $E(\varepsilon) = p$ ,  $V(\varepsilon) = pq$ .
- 2) Биномиальная  $(n, p)$ :  $E(B) = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = np$ ,  $V(B) = npq$  (надо доказывать).
- 3) Равномерная  $[a, b]$ :  $E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}$ ,  $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ .
- 4) Показательная:  $E(\tau) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$ ,  $V(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}$ .
- 5) Нормальная  $N(m, \sigma^2)$ :  $E(X) = m$ ,  $V(X) = \sigma^2$ .