Лекция 4 27.02.2012

Случайные векторы

В пространстве R^n так же, как и на действительной прямой определяется борелевская сигма-алгебра, как наименьшая сигма-алгебра, содержащая все открытые множества пространства R^n (или все замкнутые множества, или все *n*-мерные прямоугольники и т.п.).
Пусть заданы сл.в. $X_1,...,X_n$.

Определение. Упорядоченный набор $X = [X_1,...,X_n]'$ называется *n*-мерным случайным вектором.
Распределение сл. вектора –это набор вероятностей $P(X \in A)$, $A \subseteq R^n$ – борелевское множество.
Функция распределения: $x = (x_1,,.x_n)' \in R^n$, $F_X(x) = P(X_1 \le x_1,..., X_n \le x_n\}$. В многомерном случае ф.р. обладает примерно теми же свойствами, что и одномерном случае и по ней восстанавливается распределение.

Плотность распределения случайного *n*-мерного вектора *X* – это такая функция $f(x),\ x \in R^n$, что

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

для любого борелевского множества *A* в R^n.

Можно показать, что если функция распределения $F_X(x)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial^n F}{\partial x_1 ... \partial x_n}(x) = f(x)$, то эта функция является плотностью распределения.

Как и в одномерном случае, плотность обладает двумя свойствами:
1) $f(x) \ge 0$, 2) $\int_{R^n} f(x)dx = 1$, и любая (измеримая) функция с этими свойствами может быть реализована как плотность распределения некоторого случайного вектора.
Распределение однозначно восстанавливается по плотности:.

Определение. Пусть *Y* – некоторый подвектор случайного вектора *X*. Распределение сл. вектора *Y* называется маржинальным распределением. Если $Y = X_i$, то соответствующее маржинальное распределение называют одномерным маржианльным распределением.

Маржинальное распределение находится по распределению сл. вектора *X*. Например, пусть $Y = [X_1, X_2]'$, и пусть у вектора *X* есть плотность распределения $f(x_1, x_2, x_3,..., x_n)$. Тогда вектор $Y = [X_1, X_2]'$ также имеет плотность и

$$f_Y(x_1, x_2) = \int_{R^{n-2}} f(x_1, x_2, x_3,..., x_n)dx_3...dx_n .$$

Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. два разных случайных вектора могут иметь, например, одинаковые маржинальные одномерные распределения.

Независимые случайные величины

Определение. Случайные векторы (вообще говоря, различных размерностей) $X^{(1)},...,X^{(m)}$ называются независимыми, если $P(X^{(1)} \in A_1,...,X^{(m)} \in A_m) = P(X^{(1)} \in A_1)...P(X^{(m)} \in A_m)$ для любых борелевских множеств $A_1,...,A_m$ в соответствующих пространствах.

Отсюда следует, что для вектора с независимыми компонентами $F(x) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n),\ f(x) = f_{X_1}(x_1)...f_{X_n}(x_n)$, если каждое маржинальное одномерное распределение имеет плотность. Таким образом, если компоненты вектора *X* независимы, то по одномерным маржинальным распределениям можно восстановить распределение вектора *X*.

Пример. Распределение суммы двух независимых случайных величин.
$\Pr(X+Y \le z) = \iint\limits_{G_я} f_X(x) f_Y(y)dx\,dy$, где $G_z = \{(x,y): x+y \le z\}$. Имеем:

$\iint\limits_{G_я} f_X(x) f_Y(y)dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)F_Y(z-x)dx$. Предполагая возможность дифференцирования под знаком интеграла, получаем:

$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)f_X(z-x)dx$ – свертка плотностей $f_X(x),\ f_Y(y)$. В частности, если X, Y – независимые показательные сл. вел. с параметром λ (т.е. $f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$), то $f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \lambda^2 \int\limits_0^z e^{-\lambda x}\, e^{-\lambda(z-x)}dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$.

Ковариация

Определение. Число $Cov(X,Y) = E[(X-m_X)(Y-m_Y)] = E(XY) - m_X m_Y$ называется ковариацией случайных величин *X, Y*.

Свойства ковариации

1. Симметричность: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.
2. Билинейность: $Cov(aX+bY,Z) = aCov(X,Z) + bCov(Y,Z)$.
3. Если сл. в *X, Y* независимы, то $Cov(X,Y) = 0$. Действительно, пусть, например, *X, Y* имеют плотности распределения $f_X(x),\ f_Y(y)$. Тогда $E(XY) = \iint\limits_{R^2} xy\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy = m_X m_Y$. Отсюда следует, что $Cov(X,Y) = 0$.

Случайные величины *X, Y,* для которых $Cov(X,Y) = 0$, называются *некоррелированными.*
Таким образом, из независимости следует некоррелированность. Обратное, вообще говоря, неверно.
Пример. Пусть $X \sim N(0,1),\ Y = X^2$. Тогда *X, Y,* зависимы (даже функционально связаны), но $Cov(X,Y) = E(X^3) - E(X)\,E(X^2) = 0$.

Предложение (неравенство Коши-Буняковского). Для любых случайных величин ξ, η, имеющих вторые моменты, выполнено неравенство

$$\left(E(\xi\cdot\eta)\right)^2 \le \left(E(\xi^2)\right)\left(E(\eta^2)\right)$$

Доказательство. При любом *x* квадратичная функция $f(x) = E(x\xi+\eta)^2 = x^2\cdot E(\xi^2) + 2x\cdot E(\xi\eta) + E(\eta^2)$ неотрицательна, поэтому $D = 4\left[\mathrm{E}(\xi\eta)\right]^2 - 4\mathrm{E}(\xi^2)\mathrm{E}(\eta^2) \le 0$.

Следствие. Для любых случайных величин *X, Y* выполнено неравенство $\left[Cov(X,Y)\right]^2 \le \mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)$.

Доказательство. Обозначим $\xi = X - \mathrm{E}(X),\ \eta = Y - \mathrm{E}(Y)$ и применим неравенство Коши–Буняковского.

Коэффициент корреляции

Определение. Число $\rho(X,Y) = \rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(y)}} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$ называется коэффициентом корреляции случайных величин *X, Y*.

Свойства коэффициента корреляции

1. $-1 \le \rho(X,Y) \le 1,\quad \forall X,Y$ (следует из неравенства Коши-Буняковского).
2. $\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X,Y$ некоррелированы. В частности, если *X, Y* независимы, то $\rho(X,Y) = 0$. Обратное неверно.
3. Если $\rho(X,Y) = 1$, то $Y = aX + b,\ a > 0$;
   если $\rho(X,Y) = -1$, то $Y = aX + b,\ a < 0$.

Действительно,

$$0 \le E\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X} - \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2 = 2(1-\rho(X,Y)).$$

Поэтому, если $\rho(X,Y) = 1$, то

$$\frac{X-m_X}{\sigma_X} - \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y} = 0 \Rightarrow Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X + b.$$

Аналогично для $\rho(X,Y) = -1$.

«Числовые» характеристики случайных векторов

Вектор средних значений сл. вектора *X*: $m_X = [E(X_1),...,E(X_n)]'$.

Определение. Матрица $V(X) = E((X-m_X)(X-m_X)')$ называется ковариационной матрицей вектора *X*.

Свойства матрицы ковариаций

1. Симметричность: $(V(X))' = V(X)$ – очевидно.
2. Неотрицательная определенность: $z'V(X)z \ge 0,\quad \forall z \in R^n$. Действительно,

$$z'V(X)z = z'\mathrm{E}[(X-m)(X-m)']z = \mathrm{E}[z'(X-m)(X-m)'z] = \mathrm{E}\left([z'(X-m)]^2\right) \ge 0,\quad \forall z \in R^n$$