Лекция 5 05.03.2012

Пусть X и Y – случайные векторы.
Определение. Матрица $Cov(X,Y) = E((X - m_X)(Y - m_Y)')$ называется матрицей взаимных ковариаций векторов X, Y.

Свойства матрицы взаимных ковариаций

1. $Cov(X,Y) = \left[Cov(Y,X)\right]'$
2. Пусть $Z = AX + b,\ W = DY + c$ – аффинные преобразования исходных векторов. Тогда $Cov(Z,W) = ACov(X,Y)B'$

Определение. Случайные векторы X и Y называются некоррелированными, если $Cov(X,Y) = O$.

Условные распределения

2) **Дискретный случай**

Пусть $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$, $i = 1,...,m\ \ j = 1,...,n$. Обозначим $p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$, $p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$ – маржинальные распределения. Тогда $P(X = x_i \mid Y = y_j) = \dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = p_{i|j}$.

Определение. Набор $\{p_{i|j}, i = 1,...,n\}$ называется условным распределением сл.в. X при условии $Y = y_j$.

Определение. Величина $E(X \mid Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_{i|j}$ называется условным математическим ожиданием X при условии $Y = y_j$.

2. Непрерывный случай

Пусть $[X', Y']'$ – случайный вектор, $X \in R^m$, $Y \in R^n$, $f_{X,Y}(x,y)$ – (совместная) плотность распределения.

Определение. Функция

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{R^m} f_{X,Y}(x,y)dx} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

называется плотностью условного распределения X при условии Y=y.

Содержательный смысл: $P(X \in dA_x \mid Y \in dA_y) \approx \dfrac{f(x,y)\,|dA_x|\,|dA_y|}{f_Y(y)\,|dA_y|} = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}|dA_x|$, что и оправдывает определение.

Условное математическое ожидание

Определение. 1) Если $[X',Y']'$ – дискретный случайный вектор, то функция (по y_j) $\varphi(y_j)=\sum_{i=1}^{m}x_i p_{i|j}$, $j=1,...,n$ называется условным математическим ожиданием вектора X при условии $Y=y_j$.

2) Если $[X',Y']'$ – непрерывный случайный вектор, то функция (по y) $\varphi(y)=E(X\mid Y=y)=\int_{R^m}xf_{X|Y}(x\mid y)dx$ называется условным математическим ожиданием X при условии, что $Y = y$: Если вектор Y вырожден, то $E(X\mid Y=y)=E(X)$.

Другое название: функция регрессии X на Y.

Определение. Случайный вектор $\varphi(Y)$ называется условным математическим ожиданием X при условии Y.

Свойства условного МО

Пусть $X\in R^m$, $Y\in R^n$ – случайные векторы.

1. Линейность: $E(aY_1+bY_2\mid X)=aE(Y_1\mid X)+bE(Y_2\mid X)$ (*a*, *b*,– константы).
2. Правило повторного математического ожидания (телескопическое свойство, chain rule): если $g:R^m\to R^k$ – (неслучайная) функция, то $E\left(E(Y\mid X)\mid g(X)\right)=E(Y\mid g(X))$. В частности, $E\left(E(Y\mid X)\right)=E(Y)$.
3. Если g – скалярная функция, то $E(g(X)Y\mid X)=g(X)E(Y\mid X)$.
4. Если X и Y независимы, то $E(Y\mid X)=E(Y)$.
5. Оптимизационное свойство условного МО: пусть Y – скалярная сл.в. Тогда минимум среднеквадратичного отклонения $E\left(Y-f(X)\right)^2$ достигается при $f=\varphi$.

Доказательство. $E\left(Y-f(X)\right)^2=E\left(E\left(Y-f(X)\right)^2\mid X\right)=E\left(E\left((Y-\varphi(X))+(\varphi(X)-f(X))\right)^2\mid X\right)=$

$E\left(Y-\varphi(X)\right)^2+E\left(\varphi(X)-f(X)\right)^2+2E\left((\varphi(X)-f(X))E\left((Y-\varphi(X))\mid X\right)\right)=$

$E\left(Y-\varphi(X)\right)^2+E\left(\varphi(X)-f(X)\right)^2\geq E\left(Y-\varphi(X)\right)^2$.