Если бы все люди, которых я пугал до смерти, давали мне за это по пять эре, я мог бы купить целую гору шоколада. Ведь я лучшее в мире привидение! — сказал Карлсон, и глаза его весело заблестели.

Малыш, Кристер и Гунилла с радостью согласились играть в привидения. Но Малыш сказал:

— Вовсе не обязательно так ужасно пугать людей.

— Спокойствие, только спокойствие! — ответил Карлсон. — Не тебе учить лучшее в мире привидение, как должны вести себя привидения. Я только слегка попугаю всех до смерти, никто этого даже и не заметит.

Теория игр. Листочек №1.
Динамические игры с полной совершенной информацией.

Определение 1. Конечное дерево есть пара $\Gamma = (M, \sigma)$, где M—конечное множество вершин, а σ сопоставляет каждой вершине ее ближайшего предшественника, причем:
a. Существует единственная вершина m_0, такая, что $\sigma(m_0) = m_0$. Назовем ее начальной вершиной.
b. Существует целое l, такое, что $\sigma^l(m) = m_0$ для всех $m \in M$. Наименьшее такое l назовем длиной дерева Γ.

Вершина m, для которой $\sigma^{-1}(m) = \varnothing$, называется финальной (терминальной) вершиной Γ, а множество таких вершин обозначается через $T(\Gamma)$. Для нефинальных вершин m множество $\sigma^{-1}(m)$ состоит из преемников m, т. е. из следующих за m вершин.

Определение 2. Пусть N — заданное конечное сообщество. Игрой в развернутой форме со множеством игроков N называется следующая совокупность:
a. Конечное дерево $\Gamma = (M, \sigma)$.
b. Разбиение $(M_i)_{i \in N}$ множества $M \setminus T(M)$.
c. Для каждого игрока $i \in N$ функция выигрыша u_i из $T(M)$ в $\mathbb{R}$.

Разбиение $(M_i)_{i \in N}$ определяет, какой игрок ходит в каждой конкретной нефинальной вершине. Если $m_0 \in M_i$ то игра начинается с того, что игрок i должен выбрать преемника m_0, т. е. следующую за ней вершину, скажем вершину m_1 из $\sigma^{-1}(m_0)$. Если $m_1 \in T(M)$ — финальная вершина, то игра окончена и выигрыши игроков суть $u_i(m_1)$ при $i \in N$. Если $m_1 \notin T(M)$ — нефинальная вершина, то игрок j, для которого $m_1 \in M_j$, имеет право хода и выбирает следующую за ней вершину, скажем $m_2 \in \sigma^{-1}(m_1)$ и т. д.

Замечание 1. Заметьте, что по нашему предположению на каждом шаге игры игрок, делающий ход, имеет точную информацию о текущей вершине и общей структуре игры: это предположение обычно характеризуется как «полная совершенная информация».

Задача 1. Докажите, что любая игра в развёрнутой форме разрешима по доминированию. По ходу решения сформулируйте определение подыгры.

Задача 2. Пираты делят добычу: 100 слитков золота. Процедура дележа устроена следующим образом. Сначала самый старший пират предлагает дележ по своему выбору. Если хотя бы половина пиратов согласна с этим дележом, то он считается принятым. В противном случае (т. е. если абсолютное большинство пиратов его отвергает) второй по старшинству пират предлагает новый дележ добычи среди оставшихся $(n-1)$ пиратов. Старший пират никакого участия в дальнейшем дележе не принимает. Если новый дележ отвергается большинством голосов, то предложивший его пират устраняется от дальнейшего участия в дележе, и процедура повторяется для $(n-2)$ пиратов. Примем достаточно реалистичное предположение о том, что каждый пират знает функции выигрыша остальных. А именно, каждый пират из двух данных дележей предпочитает тот, в котором его доля золотых слитков больше (дележи, дающие ему одинаковую долю добычи, являются равноприемлемыми независимо от долей остальных игроков). Дух всеобщего недоверия, царивший, как известно, среди флибустьеров, позволяет предсказать, что их поведение будет некооперативным, а тогда остается только найти окончательный дележ.

Задача 3. Три негодяя — Блондин (Хороший, **G**), Ангельские Глазки (Плохой, **B**), и Туко (Злой, **U**) устроили дуэль на кладбище, где зарыт миллион долларов. Туко попадает в цель с вероятностью

0.5. Ангельские Глазки попадает с вероятностью 0.8. Блондин никогда не промахивается. Выяснить, кто в кого будет стрелять и каковы шансы дуэлянтов победить, если:
a. первым стреляет **U**, потом **B**, потом **G** и далее по кругу;
b. первым стреляет **B**, потом **U**, потом **G** и далее по кругу.

* Что изменится, если разрешить игрокам стрелять в воздух? После трёх подряд выстрелов в воздух игра заканчивается и все расходятся по домам без денег.

Задача 4. Малыш и Карлсон играют в такую игру: сначала Карлсон кладёт на круглый стол монету в пять эре, затем Малыш ещё одну, затем Карлсон и так далее. Монеты можно класть только на свободное место, двигать чужие монеты нельзя. Проигрывает тот, кто не может положить очередную монету (так как не осталось места). Выяснить, кто победит и каким образом. Предполагаем, что монеты у игроков не кончатся.

Задача 5. Он и Она делят треугольная пирог. Сначала Он ставит на пироге точку, а затем она проводит через эту точку прямой (вертикальный!) разрез и забирает одну из получившихся частей (по своему усмотрению). На какую максимальную долю Он может рассчитывать? При решении задачи можно считать, что каждый хочет урвать как можно больший кусок пирога. Решить задачу для:
a. равностороннего треугольника,
b. равнобедренного треугольника,
c. произвольного треугольника,
d*. обобщить на случай дележа тетраэдра,
e**. обобщить на n-мерный случай.

Задача 6. Пусть дана игра в нормальной форме

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{x \in X, y \in Y\}, \{f(x, y), g(x, y)\}\rangle.$$

Может ли так получиться, что игрокам выгоднее установить порядок ходов, чем играть равновесие Нэша? Выгодно ли ходить первым? Или лучше вторым? Рассмотреть набор «стандартных» примеров. Самостоятельно сформулировать и доказать утверждения, отвечающие на эти вопросы. (Вида: «При выполнение некоторых условий что-то точно выгодно, а что-то точно не выгодно»).

Задача 7*. Пусть как и в прошлой задаче дана игра в нормальной форме Г. Предположим, что множества X, Y — компактны, а функции $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ непрерывны. На основе этой игры построим следующие иерархические игры:

Игра Γ_1. Первый игрок выбирает стратегию $x \in X$ и сообщает её второму. Затем второй игрок выбирает стратегию $y \in Y$, зная x. После чего первый игрок получает $f(x, y)$, второй — $g(x, y)$.

Игра Γ_2. Первый игрок выбирает стратегию вида $r : Y \to X$ и сообщает её второму. Второй игрок, зная $r(\cdot)$, выбирает y. После чего первый игрок получает $f(r(y), y)$, второй — $g(r(y), y)$.

Игра Γ_3. Пусть Q — множество всех функций $q : X \to Y$. Первый игрок выбирает свою стратегию вида: $p : Q \to X$ и сообщает её второму. Второй игрок, зная $p(\cdot)$, выбирает свою стратегию $q(\cdot)$ из множества Q. После чего первый игрок получает $f(p(q(\cdot)), q(p(q(\cdot))))$, второй — $g(p(q(\cdot)), q(p(q(\cdot))))$.

Необходимо исследовать эти игры, дать их экономическую интерпретацию и описать их решения в максимально простой форме (это возможно). Если вам этого показалось мало, **попробуйте самостоятельно задать игру Γ_4.

Задача 8. Вовочка и его отец играют в следующую игру. Сначала Вовочка выбирает действие A, которое приносит ему доход $I_c(A)$ и доход для родителя $I_p(A)$. Далее отец наблюдает исходы I_c и I_p, а затем выбирает награду B для своего сына. Функция выигрыша Вовочки: $U(I_c + B)$, его отца: $V(I_p - B) + kU(I_c + B)$, где параметр $k > 0$ отражает «родительское участие в благополучии ребёнка». Допустим, что действие Вовочки — выбор неотрицательного числа $A \geqslant 0$; функции доходов $I_c(A)$ и $I_p(A)$ строго вогнуты и достигают максимума при $A_c > 0$ и $A_p > 0$ соответственно. Награда B может быть положительной или отрицательной. Функции полезности U и V возрастающие и строго вогнуты. Докажите, что Вовочка выберет действие, максимизирующее совокупный семейный доход $I_c(A) + I_p(A)$.