... Демокрит говорит: «Люди измыслили идол случая, чтобы пользоваться им как предлогом, прикрывающим их собственную нерассудительность. Ибо редко случай оказывает сопротивление разуму, чаще же всего в жизни мудрая проницательность направляет [к достижению поставленной цели]»
Дионисий, епископ Александрийский, у Евсевия «Praep. Evangel.» XIV, 27, 5.

Теория игр. Листочек №2.
Динамические игры с несовершенной информацией. Поведенческие стратегии. Совершенство по подыграм.

Игра в развернутой форме (Г) есть совокупность следующих объектов:
1. Множества игроков $I = \{1, \cdots, N\} \cup \{$ природа $\}$.
2. Дерева игры — $(X, \vdash)$, где
2.1. X — множество вершин.
2.2. $\vdash$ — отношение наследования: $x \vdash y$ означает «x происходит раньше, чем y». Пусть это отношение обладает следующими свойствами:
2.2.1 $\vdash$ транзитивно: если $x' \vdash x$, $x \vdash x''$, то $x' \vdash x''$.
2.2.2 $\vdash$ антисимметрично: не выполняется $x \vdash x$. Антисимметричность и транзитивность определяют $\vdash$ как частичный порядок на X.
2.2.3 Если $x' \vdash x$ и $x'' \vdash x$, то либо $x' \vdash x''$, либо $x'' \vdash x$.
2.3. Множестно конечных вершин $Z \subset X$: для $z \in Z$, не существует $x \in X$, такой, что $z \vdash x$
2.4. Начальная вершина $o \in X$, такая, что $o \vdash x$ для всех $x \in X \setminus \{o\}$.
3. Функций выигрышей: $u_i : Z \to \mathbf{R}$ для $i = 1, \ldots, N$.
4. Очередности ходов $\dot{l} : X \setminus Z \to I$.
5. Множества действий A. Пусть $A(x)$ — действия, доступные в вершине $x \in X \setminus Z$.
6. Информационных множеств. Пусть H — разбиение $X \setminus Z$ на подмонжества, такое, что
6.1. Для всех $h \in H$, если $x \in h$ и $x' \in h$, то $i(x) = i(x')$, то есть в каждом информационном множестве объединены вершины, в которых ходит только один игрок, и
6.2. Если $x, x' \in h$, то $A(x) = A(x')$. То есть во всех вершинах, входящих в информационное множество, игроку доступен один и тот же набор действий.

Множество X и отношение $\vdash$ определяет направленный граф. Условия на отношение $\vdash$ гарантируют, что граф является *деревом.* Начальная вершина o соответствует моменту начала игры. Каждая вершина, которая не является конечной, означает либо принятие решения одним из игроков, либо случайный ход, который делает природа. Каждая конечная вершина соответствует окончанию игры и какому-то вектору выигрышей игроков. Информационные множества показывают, что известно игрокам о ходах, сделанных ранее другими игроками.

Пусть Г — игра в развернутой форме. **Подыгра** $\Gamma(x_0)$ — состоит из части дерева игры Г $X(x_0)$, которая начинается с некоторой вершины $x_0 \in X \setminus Z$, включает все вершины $y \in X : x_0 \vdash y$ и только их; также $\Gamma(x_0)$ включает сужение множества игроков, функций выигрыша, очерёдности ходов, множества действий и информационых множеств из исходной игры Г на $X(x_0)$. Кроме того, должны быть выполнены следующие условия:
1. x_0 — единственный элемент в своем информационном множестве в игре Г .
2. Информационные множества в игре Г, содержащие вершины из $X(x_0)$, не содержат вершин не из $X(x_0)$.

Пусть Г — динамическая игра. Профиль стратегий является **совершенным по подыграм** если он является равновесным в каждой из подыгр игры Г.

Задача 1. Пусть на первом шаге динамической игры каждый из двух мафиози решает, сотрудничать ему со следствием или нет; это стандартная дилемма заключённых (числа в матрице - тюремные сроки: чем больше, тем хуже):

	X	Y
X	1,1	5,0
Y	0,5	4,4

А на втором шаге крёстный отец мафии решает, как поступить с тем, кто вышел на свободу, подставив товарища. Издержки мафии от того, что её боец сидит в тюрьме равны 1 за каждый год, издержки на поимку и наказание предателя равны 2. Каждый мафиози больше всего на свете боится быть наказанным своими же.

Найти совершенное по подыграм равновесие. Что изменится, если крёстный отец принципиальный и никогда не меняет принятых решений? (То есть может дать другим игрокам обязательство не менять свою стратегию по ходу игры (commitment))

Задача 2. В автомобильной промышленности два производителя: A и B. Кроме того, существует профсоюз автомобильных рабочих. В момент времени 1 профсоюз устанавливает заработную плату w, которую будет получать работник. В момент времени 2 каждая фирма $i = A, B$ решает, какое количество q_i машин ей следует произвести. Предположим, что для производства машины требуется один рабочий. Рыночная цена равна $P = 1 - q_A - q_B$. Прибыль каждой фирмы равна $u_i = Pq_i - wq_i$, выигрыш профсоюза равен суммарной зарплате всех рабочих $U_w = (q_A + q_B)w$. Найдите совершенное по подыграм равновесие Нэша.

Задача 3. Студентам на дом задали 6 задач. Каждую задачу студент может или списать, или решить сам. Пусть «трудозатраты» на списывание равны 0, на решение — 1. Затем преподаватель выбирает, сколько задач проверить (задачи для проверки выбираются случайно), его «трудозатраты» на проверку одной задачи равны 1. Если выясняется, что хоть одна задача списана, студент получает 1 балл за всю работу, если работа прошла проверку, то 10 баллов. Выигрыш студента составляет его балл минус трудозатраты. Считать, что проигрыш преподавателя равен его трудозатратам на проверку плюс число списанных студентом задач (независимо от того, попался студент или нет).
(a) Построить математическую модель игры и найти все равновесия.
(b) Что изменится, если преподаватель сначала объявляет количество проверяемых задач и сдерживает слово? А что если после того, как работы сданы, преподаватель может передумать?

Задача 4. Показать эквивалентность расширенной и нормальной форм игр. Как сводить одну форму к другой? Что при этом происходит со стратегиями игроков? Как определить смешанную стратегию в игре в развёрнутой форме?

Множество **поведенческих стратегий** игрока i в игре Γ есть

$$B_i = \times_{h_i \in H_i} \Delta^{|A(h_i)|-1}. \qquad (1)$$

Поведенческая стратегия предписывает с какой вероятностью нужно выбирать каждое из действий в каждом информационном множестве.

Кто-то предложил такую аналогию. Чистая стратегия - это книга, страницы которой соответствуют информационным множествам, а на каждой странице записан тот ход, который нужно сделать в этом месте. Набор всех чистых стратегий - библиотека. Чтобы реализовать смешанную стратегию, нужно случайно выбрать книгу. А поведенческая стратегия - это снова книга, только на каждой странице указан не один ход, а вероятности выбора ходов.

Задача 5*. Доказать, что для игр с полной совершенной информацией смешанные и поведенческие стратегии эквивалентны.

Задача 6*. Может ли быть такое, что в игре с полной совершенной информацией (в которой все исходы для всех игроков различны) существуют равновесия в смешанных стратегиях, отличные от равновесий в чистых стратегиях?

Задача 7. Возможно ли такое, что в некоторой динамической игре оба игрока согласятся на введение дополнительного (содержащего более одной вершины) информационного множества? (Т.е. обоим это будет выгодно)

Задача 8. Рассмотрим антагонистическую игру двух лиц, в которой игрок I — один человек, а игрок II — команда из двух человек A и B. Все трое изолированы друг от друга (находятся в изолированных помещениях) и не могут общаться между собой. В начале игры посредник входит в помещение, где находится игрок I, и предлагает ему выбрать число из множества $\{1, 2\}$. Если игрок I выбирает 1, то посредник заходит сначала в помещение, где находится A, и предлагает ему выбрать число из множества $\{1, 2\}$, затем заходит к B и предлагает ему сделать выбор из множества $\{1, 2\}$. Если же игрок I выбирает 2, то посредник предлагает игроку B сделать выбор первому. После того как три числа выбраны, игрок 1 выигрывает величину $K(x, y, z)$, где x, y, z — выборы игрока I и членов команды II A и B соответственно. Функция $K(x, y, z)$ определяется следующим образом:

$K(1, 1, 1) = 1 \quad K(1, 2, 1) = 7$
$K(2, 1, 1) = 5 \quad K(2, 2, 1) = 6$
$K(1, 1, 2) = 3 \quad K(1, 2, 2) = 9$
$K(2, 1, 2) = 1 \quad K(2, 2, 2) = 7$

Построить математическую модель и найти все совершенные по подыграм равновесия.

Задача 9. На кафедре экономики в некотором университете пять профессоров. Секретарь кафедры просит каждого скинуться по 100 рублей для фуршета после заседания кафедры. Для того, чтобы фуршет состоялся, необходимо, чтобы скинулось как минимум три профессора. Деньги, отданные на организацию фуршета, профессорам не возвращаются. Ценность фуршета для каждого профессора — 500 рублей. Найдите совершенное по подыграм равновесия, если профессора 1 и 2 сдают деньги первыми (по очереди). Затем, решение (сдавать или не сдавать) одновременно принимают профессора 3–5, причем они не наблюдают решения 1 и 2.

Задача 10. Общество состоит из диктатора (R) и двух групп граждан (A и B). На первом этапе диктатор решает, стоит ли ему экспроприировать собственность одной из групп, и если да, то какой именно. Если экспроприации нет, то выигрыш всех трех игроков равен 0. Если диктатор решил провести экспроприацию, то на втором этапе каждая из групп решает, стоит ли ей бунтовать против диктатора. Бунт удается только если обе группы решают бунтовать. В таком случае экспроприации не происходит, диктатор несет издержки $k > 0$, каждая из двух групп получает выигрыш $b > 0$. Если бунтует только одна группа, то она несет издержки $c > 0$; кроме того, диктатор экспроприирует собственность на сумму $x > 0$ у группы, выбранной им на первом шаге, в этом случае его выигрыш составит x. Построить математическую модель и найти все совершенные по подыграм равновесия.

Задача 11*. В шуточной игре играют две команды: игрок 1 (m_1 женщин и m_2 кошек); игрок 2 (n_1 мышей и n_2 мужчин). На каждом шаге каждый из игроков выбирает своего представителя. Один из двух выбранных представителей «устраняется» согласно следующим правилам: женщина «устраняет» мужчину; мужчина «устраняет» кошку; кошка «устраняет» мышь; мышь «устраняет» женщину. Игра продолжается до тех пор, пока в одной из групп не останутся игроки только одного типа. Когда группа не имеет больше выбора, другая группа, очевидно, выигрывает. Найти все совершенные по подыграм равновесия.

Задача 12. Два политика соревнуются друг с другом на президентских выборах. В момент времени $t = 1$ каждый политик $i = 1, 2$ выбирает политическую программу $y_i \in [0, 1]$. В момент времени $t = 2$ политики решают, сколько средств следует потратить на избирательную кампанию: e_1, e_2. Далее каждый из избирателей голосует за одного из политиков. Пусть существует континуум избирателей. Каждый избиратель характеризуется своей наилучшей альтернативой альтернативой v. Пусть наилучшие альтернативы распределены равномерно на $[-w, w]$. Предположим, что полезность избирателя с наилучшей альтернативой v при голосовании за кандидата i равна

$$u_i(v) = -(y_i - v)^2 - \sqrt{e_i}.$$

Будем считать, что избиратель голосует за того кандидата, кто приносит ему большую полезность.
(a) При данных y_1, y_2, e_1, e_2 найдите V_1, V_2 — доли голосов (от общего числа избирателей), получаемые кандидатами.
(b) Пусть полезность кандидата i равна $V_i - e_i$. Найдите, какими будут e_1, e_2 в совершенном по подыграм равновесии при данных y_1, y_2 (предполагая, без потери общности, что $y_1 \leq y_2$. Объясните зависимость e_1, e_2 от w и от $y_2 - y_1$.
(c) Найдите, чему будут равны y_1, y_2 в совершенном по подыграм равновесии. Почему мы не будем иметь $y_1 = y_2$?

Задача 13*.

Найти все равновесия в следующей динамической игре. Будут ли они Парето оптимальными? Как эти равновесия соотносятся со «здравым смыслом»? Можно ли их принять в качестве прогноза исхода игры?