Но не вздумай использовать науку (я имею в виду науку настоящую) как средство против христианства. Наука вынудит его задуматься над реальностями, которых он не может ни коснуться, ни увидеть. Среди современных физиков есть печальные тому примеры. А если уж ему непременно нужно барахтаться в науке, пусть займется экономикой или социологией. Не давай ему убежать от этой бесценной «действительной жизни».

Клайв Стейплз Льюис. Письма Баламута

Теория игр. Листочек №3.
Повторяющиеся игры. Марковские стратегии. Народная теорема.

Задача 1. Пусть некоторая конечная игра в нормальной форме повторяется несколько раз, причём игроки помнят события всех предыдущих раундов, а их выигрыш каждого из игроков есть просто сумма его выигрышей в отдельных раундах. Дайте формальное определение получившейся динамической игры в развёрнутой форме. Сколько стратегий будет у каждого из игроков?

Пусть $G = \langle \mathrm{N}, \{s_i \in S_i\}_{i \in \mathrm{N}}, \{u_i(s)\}_{i \in \mathrm{N}} \rangle$ — игра в развернутой форме. Стратегии $s_i, s_i' \in S_i$ игрока i ($i \in \mathrm{N}$) являются **эквивалентными**, если $u_j(s_i, s_{-i}) = u_j(s_i', s_{-i})$ для всех $j \in \mathrm{N}$, s_{-i}.

Задача 2. Пусть двое играют в «камень-ножницы-бумага» пять раундов подряд. В каждом раунде победитель платит побеждённому один рубль, при ничьей никто никому не платит. В итоге выигрыши суммируются. Сколько всего неэквивалентных стратегий есть у каждого из игроков?

Задача 3. Пусть некоторая конечная игра в нормальной форме повторяется два раза. Может ли быть такое, что средний выигрыш в некотором равновесии динамической игры будет строго лучше для каждого игрока, чем его выигрыш в любом из равновесий статической игры?

Задача 4. Существует ли в данной игре, повторенной два раза, совершенное по подыграм равновесие, в котором на первом ходе игроки реализуют профиль действий (B, b)? А что изменится, если в каждой подыгре равновесие не может быть Парето-доминируемым другим равновесием? Объясните, как и почему дополнительное требование Парето-эффективности равновесий в подыграх сужает множество выигрышей, которые можно реализовать в совершенном по подыграм равновесии.

	a	b	c	d	e
A	1,1	5,0	0,0	0,0	0,0
B	0,5	4,4	0,0	0,0	0,0
C	0,0	0,0	3,3	0,0	0,0
D	0,0	0,0	0,0	$4,\frac{1}{2}$	0,0
E	0,0	0,0	0,0	0,0	$\frac{1}{2}$,4

Пусть $G = \langle I, A, U \rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда **марковская стратегия** с памятью T для игрока i есть функция

$$m_i : A^T \to A_i,$$

которая определяет a_{it} для каждой истории игры длиной T.

Задача 5. Пусть повторяющаяся игра продолжается некоторое случайное число раундов. Например так: после окончания некоторого раунда с вероятностью p будет ещё один раунд, а с вероятностью $1-p$ игра закончится. Чему будут равны средние выигрыши игроков? Как это соотносится с идеей дисконтирования в бесконечно повторяющейся игре? Почему в данном случае нужно уточнять множество стратегий игрока, например, используя понятие марковских стратегий?

Задача 6*. Докажите, что определение выигрыша игроков в бесконечно повторяющейся игре как **предела средних** $U_i' = \lim\inf\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=0}^{\infty} u_{it}$ не эквивалентно определению **дисконтированных** выигрышей $U_i = (1-\delta)\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t u_{it}$ вне зависимости от того, какой показатель дисконтирования выбирается. Почему в определении предела средних нужна точная нижняя грань?

Задача 7. Пусть дана игра в нормальной форме.

$$G = \langle \mathrm{N}, \{s_i \in S_i\}_{i \in \mathrm{N}}, \{u_i(s)\}_{i \in \mathrm{N}} \rangle.$$

Докажите, что в любом Нэшевском равновесии игрок i не может получить меньше своей **резервационной полезности**

$$\underline{u}_i = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Докажите, что это утверждение останется верным и для средних равновесных выигрышей в бесконечно повторяющейся игре $G(\delta)$.

Задача 8. Докажите следующий вариант народной теоремы. Пусть $G = \langle \mathrm{N}, \{s_i \in S_i\}_{i\in \mathrm{N}}, \{u_i(s)\}_{i\in \mathrm{N}}\rangle$ — игра в нормальной форме. Пусть $\forall i \in \mathrm{N}\ u_i(s) > \underline{u}_i$. Тогда существует $\overline{\delta} < 1$, такой, что для всех $\delta \in [\overline{\delta}, 1)$ в повторяющейся игре $G(\delta)$ существует равновесие, в котором приведенные выигрыши игроков равны $u(s)$.

Задача 9*. Почему в условии теоремы из задачи 8 нельзя вместо $\underline{u}_i$ использовать

$$\max_{s_i\in S_i}\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$$

. Привести контрпример.

Задача 10. Иван и Никифор играют в «дилемму заключенных» со следующей матрицей выигрышей (справа). Вне зависимости от исхода игры, на следующий день игра повторяется, и так до бесконечности. Пусть $\delta < 1$ — фактор дисконта. При каком минимальном δ можно реализовать в равновесии средний выигрыш $(4, 4)$?

	X	Y
X	1,1	0,5
Y	5,0	4,4

Задача 11*. Обобщить и доказать теорему из задачи 8 так, чтобы в равновесии в бесконечно повторяющейся игре выигрыши игроков достигали любого значения из множества $X \cap Y$, $X = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} | x = \sum_{s\in S} \alpha_s u(s), \sum_{s\in S} \alpha_s = 1, \alpha_a \geq 0\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^N | y_i > \underline{u}_i\}$.

Задача 12. В некоторой стране только что выбрали президента. Действия президента на посту определяются величиной $r \in [0, 1]$. Чем меньше эта величина, тем лучше избирателям, и тем хуже президенту. Например, r может отражать долю своего личного времени, которую президент тратит на не государственные дела, или количестко денег, которое он ворует из государственного бюджета (чем больше ворует, тем больше r). Сразу после выборов публика ставит президенту следующее условие: он будет переизбран только если $r \leq \bar{r}$. Если президента переизбирают, то публика снова устанавливает $\bar{r}$, после чего президент выбирает r. Если президента не переизбирают, то игра заканчивается. Пусть выигрыш президента равен $U_p = \sum_{t=0}^{\infty} r_t \delta^t$, где r_t — действие президента в момент времени t. Выигрыш избирателей в момент времени t есть $1 - r_t$. Найдите стационарное равновесие, то есть такое, в котором $\bar{r}$ и r одинаковы во всех периодах.

Задача 13. Пусть в модели последовательного торга Бэрона-Фереджона (Захаров, стр. 118) все игроки-парламентарии делятся на две группы численностью $A + B = N$. В каждом периоде вероятность того, что игрок из первой группы будет предлагать дележ, равняется $\frac{1}{N} < p < \frac{1}{A}$, вероятность того, что дележ предложит кто-нибудь из второй группы: $q = \frac{1-Ap}{B}$. Для того, чтобы дележ был утвержден, достаточно поддержки $\frac{N+1}{2}$ парламентариев. Выпишите систему уравнений относительно R_a, r_A, R_B, r_B — стоимостей игры для предлагающего и не предлагающего дележ игрока из каждой группы. Какой дележ будет предложен каждым игроком? Найдите стационарное равновесие. Объясните, почему мы можем иметь $r_A < r_B$.

Задача 14. Найдите марковское равновесие в модели последовательного торга Рубинштейна с двумя игроками. Докажите, что это равновесие — единственное совершенное по подыграм равновесие. Верно ли то же самое относительно марковского равновесия в модели Бэрона-Фереджона?