Уравнения математической физики

Домашнее задание 1, 2011-2012 учебный год

1. Классифицировать дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными, включающее единственную смешанную производную

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

Предложить ортогональную замену переменных, приводящую его к виду без смешанной производной.

2. Найти радиально симметричные решения уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с $k > 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Указание. Воспользоваться формулой

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2(ru)}{dr^2}.$$

3. При переходе от декартовых координат на плоскости (x, y) к полярным координатам (r, φ): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ досчитать смешанную производную

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Оценить ее через производные по r, φ.

4. Найти решения вида $\alpha(r)\beta(\varphi)$ двумерного уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области $0 < r < R$.

5. Вывести первую и вторую формулы Грина для более общего, чем Δu, дифференциального оператора $\operatorname{div}(A\nabla u) - cu$, где $\operatorname{div} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$ и ∇ – операторы дивергенции и градиента, а $A = A(x)$ и $c = c(x)$– заданные матрица и функция.