Уравнения математической физики

Домашнее задание 2, 2011-2012 учебный год

1. Какие полиномы второго порядка от n переменных являются решениями уравнения Лапласа во всем пространстве $\mathbb{R}^n$?

2. Вывести аналог интегрального представления Грина в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с использованием дифференциального оператора $\Delta u + k^2 u$ с $k > 0$ (вместо Δu) и радиально симметричного решения уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$, неограниченного при $x \to 0$ (вместо фундаментального решения оператора Лапласа). Использовать решение задачи 5 предыдущего домашнего задания.

3. Проверить, что для краевой задачи Дирихле для n–мерного уравнения Пуассона в полупространстве $x_n > 0$ функцией Грина служит функция

$$G(x,\xi) = \Phi(x-\xi) - \Phi(x^* - \xi),$$

где Φ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, а x^* – зеркальное отражение точки x относительно плоскости $x_n = 0$.

Вычислить ее производную по нормали на границе полупространства

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\right|_{\xi_n=0}$$

и компактно записать формулу для решения указанной задачи.

4. Рассмотреть вместо краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона третью краевую задачу

$$-\Delta u = f \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = g \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где $\sigma \geqslant 0$, $\sigma \not\equiv 0$ и g – функции, заданные на $\partial\Omega$. Предложить конструкцию функции Грина (т.е. фактически снова корректора к фундаментальному решению), позволяющую из интегрального представления Грина получить интегральную формулу для решения этой задачи.

5. Переписать формулу Пуассона, выведенную для решения краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре

$$\Delta u = 0 \ \text{ в } B_R(0), \quad u = g \ \text{ на } \partial B_R(0),$$

в полярных координатах в случае двумерного круга $B_R(0)$.

6. Для двумерного уравнения Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \text{ в прямоугольнике } 0 < x < X, \ 0 < y < Y$$

найти все решения с разделяющимися переменными вида $\alpha(x)\beta(y)$ такие, что $\alpha(0) = \alpha(X) = 0$.