Уравнения математической физики

Задание 4

1. Функция комплексного переменного $\mathbf{u}(z)$, аналитическая в круге $|z| < R$, может быть разложена в нем в *ряд Тейлора*
$$\mathbf{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$
Уставить связь между комплексными коэффициентами c_n и коэффициентами разложения в ряд методом разделения переменных гармонической в этом круге функции $\hat{u}(r,\varphi) = u(x,y) = \operatorname{Re}\mathbf{u}(z)$.

2. В предыдущем задании было предложено построить формальное решение в виде ряда краевой задачи Неймана для двумерного уравнения Лапласа в круге
$$\begin{aligned} &\Delta_{r,\varphi} u = 0 \ \text{ при } 0 < r < R, \\ &\frac{\partial u}{\partial r}(R,\varphi) = g(\varphi), \ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$
Дать обоснование этого формального решения, указав условия на функцию g, при которых этот ряд: 1) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в открытом круге $0 \leqslant r < R$ и удовлетворяет в нем уравнению Лапласа; 2) является непрерывно дифференцируемой функцией в замкнутом круге $0 \leqslant r \leqslant R$ и удовлетворяет краевому условию Неймана при $r = R$.

3. Выписать формальное решение методом разделения переменных краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике
$$\begin{aligned} &\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \text{ в } \ \Omega = (0,X)\times(0,Y), \\ &u(x,0) = g_0(x), \ \ u(x,Y) = g_1(x) \ \text{ при } 0 < x < X, \\ &u(0,y) = g_2(y), \ \ u(X,y) = g_3(y) \ \text{ при } 0 < y < Y. \end{aligned}$$
Указание. Использовать решение первой частной задачи — с $g_0(x) = 0$, $g_1(x) = 0$, данное на предыдущем семинаре, и выписанное по аналогии с ним решение второй частной задачи
$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \ \text{ в } \ (0,X)\times(0,Y), \\ &u(x,0) = g_0(x), \ \ u(x,Y) = g_1(x) \ \text{ при } 0 < x < X, \\ &u(0,y) = 0, \ \ u(X,y) = 0 \ \text{ при } 0 < y < Y. \end{aligned}$$

4. Решить задачу на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < X, \quad u(0) = 0, \quad u'(X) + \sigma u(X) = 0,$$

где $\sigma \geqslant 0$.

Вычислить также интегралы от квадратов собственных функций по отрезку $[0, X]$.

5. Вывести результат о непрерывной зависимости решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа от граничной функции в n–мерном шаре из формулы Пуассона для решения этой задачи (а не из принципа максимума, как в §5 лекций).