

Уравнения математической физики

Задание 5

1. Для функции комплексного переменного $\mathbf{u}(z)$, аналитической в области Ω на комплексной области, справедлива *интегральная формула Коши*

$$\mathbf{u}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{u}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где Γ – кусочно–гладкий контур в Ω , внутренность которого также лежит в Ω , а z лежит внутри Γ .

Воспользовавшись ей, вывести первую формулу среднего значения для гармонической функции $u(x, y) = \operatorname{Re} \mathbf{u}(z)$.

2. Пусть u – гармоническая в области Ω функция. Доказать следующую формулу для ее градиента:

$$\nabla u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u(\xi) \nu(\xi) ds$$

для любого замкнутого шара $B_R(x) \subset \Omega$, где $\nu(\xi)$ – (единичная) внешняя нормаль к $\partial B_R(x)$ в ее точке ξ .

3. Пусть $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ – вектор–функция с гармоническими в ограниченной области Ω компонентами $u_1, \dots, u_m \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$. Доказать, что справедлив следующий принцип максимума: $\max_{\bar{\Omega}} |\mathbf{u}(x)| = \max_{\partial\Omega} |\mathbf{u}(x)|$.
4. Пусть u – гармоническая функция в \mathbb{R}^n , ограниченная на \mathbb{R}^n . Тогда $u(x) \equiv \operatorname{const}$ в \mathbb{R}^n .

Указание. Воспользоваться неравенством Харнака.

5. Рассмотреть задачу на собственные значения

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x) \quad \text{в } \Omega = (0, X_1) \times \dots \times (0, X_n), \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

в которой требуется найти собственные значения λ и соответствующие нетривиальные собственные функции $u = u_\lambda \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$, $u_\lambda(x) \not\equiv 0$ в Ω .

Решить ее методом разделения переменных, т.е. найти собственные функции вида $u_\lambda(x) = u_1(x_1) \dots u_n(x_n)$ и соответствующие собственные значения λ .