

## Уравнения математической физики

### Задание 6

1. Для задачи на собственные значения для оператора Лапласа доказать свойство положительности собственных значений в случае 1-го и 3-го краевых условий и их неотрицательности в случае 2-го краевого условия.
2. Дать подробный вывод разложения в обобщенный степенной ряд функции Бесселя  $J_{-\nu}(x)$ ,  $\nu > 0$ :
  - а) при  $\nu$ , не являющемся натуральным числом;
  - б) при натуральном  $\nu$ .
3. Доказать формулу  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  при натуральном  $n$ .
4. Доказать рекуррентную формулу

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \nu \geq 0.$$

5. Методом разделения переменных решить задачу на собственные значения для уравнения Пуассона в круге в полярных координатах

$$-\Delta u(r, \varphi) = \lambda u(r, \varphi) \quad \text{при } 0 < r < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u(R, \varphi) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Подсчитать интегралы от квадрата собственных функций по этому кругу.

*Указание.* Использовать функции Бесселя.

6. Записать решение двумерной краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона в круге в полярных координатах

$$-\Delta u(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi \quad \text{при } 0 < r < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u(R, \varphi) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

в виде ряда по собственным функциям соответствующей задачи на собственные значения.