Уравнения математической физики

Задание 7

1. Доказать формулу
$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \quad x > 0.$$

2. Найти собственные значения и собственные функции третьей краевой задачи для уравнения Пуассона
$$-\Delta u = \lambda u \ \text{ в } \ B_R(0), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = 0 \ \text{ на } \ \partial B_R(0),$$
где $B_R(0)$ – круг радиуса R с центром в 0, а $\sigma = \mathrm{const} > 0$. Использовать метод разделения переменных.

3. Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности имеет вид
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,0) = u_0(x) \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n.$$
С использованием интегрального представления найти ее решение при $u_0(x) = \alpha$ для $x_1 < 0$, $u_0(x) = \beta$ для $x_1 \geqslant 0$. Записать его с помощью так называемой *функции ошибок*
$$\mathrm{erf}(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^q e^{-p^2}\,dp.$$
Значения из какого диапазона принимает решение? На каких пространственно–временных поверхностях оно принимает постоянные значения?

4. Найти решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности при $u_0(x) = e^{-b|x|^2}$, $b \geqslant 0$.

5. Задача Коши для неоднородного трехмерного уравнения теплопроводности имеет вид
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t) \ \text{ в } \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,0) = u_0(x) \ \text{ в } \ \mathbb{R}^3.$$
Упростить интегральное представление ее решения при $u_0(x) = 0$ и правой части f, не зависящей от t, вычислив в нем интеграл по t.