Уравнения математической физики

Задание 8

1. Найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,0) = u_0(x) \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n$$

   в случае, когда начальная функция $u_0(x)$ – *характеристическая функция* куба $K = [-a,a]^n$ $(a > 0)$, т.е. $u_0(x) = 1$ при $x \in K$ либо $u_0(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$.

   Чему равен $\lim\limits_{t \to +\infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x,t)|$?

2. Пусть функция $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ является решением первой начально–краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t) \ \text{ в } \ Q_T = \Omega \times (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \ \text{ на } \ \Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ на } \ \bar{\Omega}, \tag{3}$$

   где Ω – ограниченная область Ω в $\mathbb{R}^n$. Убедиться, что если функция $w \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ удовлетворяет соответствующим неравенствам

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w \geqslant f(x,t) \ \text{ в } \ Q_T,$$
$$w(x,t) \geqslant g(x,t) \ \text{ на } \ \Gamma_T,$$
$$w(x,0) \geqslant u_0(x) \ \text{ на } \ \bar{\Omega},$$

   то $w(x,t) \geqslant u(x,t)$ в $\bar{Q}_T$ (и поэтому w называют *суперрешением* задачи (1)–(3)).

   Сформулировать и доказать аналогичный факт для субрешений той же начально–краевой задачи.

3. Выписать интегральное представление решения задачи (1)–(3) с $g = 0$ для случая, когда $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ – полупространство.

   Указание. Воспользоваться нечетным продолжением f, u_0 и решения u по x_1 на $x_1 < 0$ и тем самым свести поставленную задачу к задаче Коши.

4. Сформулировать и обосновать принцип Дюамеля для начально–краевой задачи (1)–(3), где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а $g = 0$.

5. Решение начально–краевой задачи (1)–(3), где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, с $f = 0$, $g = 0$ можно представить в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} v_k(x) e^{-a^2 \lambda_k t}, \quad u_{0k} = \frac{\int_\Omega u_0(x) v_k(x)\,dx}{\int_\Omega v_k^2(x)\,dx},$$

где λ_k и $v_k(x)$ — собственные значения и собственные функции соответствующей задачи на собственные значения для оператора Лапласа. Воспользовавшись принципом Дюамеля, вывести из этих формул соответствующее представление решения в виде ряда для случая $f \not\equiv 0$, $g = 0$ и $u_0 = 0$.

6. Выписать решение начально–краевой задачи (1)–(3) в виде ряда методом разделения переменных для случая, когда Ω – круг радиуса R с центром в 0, $g = 0$, а функции f, u_0 и решение u не зависят от угловой переменной.