Уравнения математической физики

Задание 9

1. Рассмотреть задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,0) = u_0(x) \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n \tag{1}$$

в случае начальной функции вида $u_0(x_1, \ldots, x_n) = u_0^{(1)}(x_1) \ldots u_0^{(n)}(x_n)$, где $u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(n)} \in C_b(\mathbb{R})$. Убедиться, что тогда

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = u^{(1)}(x_1, t) \ldots u^{(n)}(x_n, t),$$

где $u^{(i)}$ – решение соответствующей *одномерной* задачи Коши $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x_i^2} = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u^{(i)}(x_i, 0) = u_0^{(i)}(x_i) \ \text{ на } \ \mathbb{R}.$$

2. Рассмотреть начально–краевую задачу для пространственно одномерного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \ \text{ в } \ Q_T = (0, X) \times (0, T], \\ &u(0,t) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u\right)(X, t) = 0 \text{ на } \ (0, T], \\ &u(x, 0) = u_0(x) \ \text{ на } \ [0, X], \end{aligned}$$

где $\sigma = \text{const} > 0$. Выписать ее решение в виде ряда методом разделения переменных.

3. Начально–краевая задача для уравнения теплопроводности с однородным краевым условием Неймана имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t) \ \text{ в } \ Q_T = \Omega \times (0, T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T], \tag{3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \ \text{ на } \ \bar{\Omega}, \tag{4}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, ν — нормаль к $\partial\Omega$. Выписать ее решение в виде ряда методом разделения переменных для случая, когда Ω – круг радиуса R с центром в 0.

4. Задача Коши для уравнения колебаний струны имеет вид: найти $u \in C^2(\bar{\Pi}_T)$ такую, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \ \text{ при } \ (x,t) \in \Pi_T := \mathbb{R} \times (0,T],$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x) \ \text{ при } x \in \mathbb{R}.$$

   В предположении, что

$$\underline{u}_0 \leqslant u_0(x) \leqslant \bar{u}_0, \quad \underline{v} \leqslant v(x) \leqslant \bar{v}, \quad \underline{f} \leqslant f(x,t) \leqslant \bar{f}, \quad (x,t) \in \bar{\Pi}_T,$$

   получить равномерную двустороннюю оценку $u(x,t)$ в $\bar{\Pi}_T$.

5. Рассмотреть решение задачи Коши для уравнения колебаний струны с коэффициентом $a = 1$, выраженное формулой Даламбера, в случае

$$f = 0, \quad u_0 = 0, \quad v(x) = 1 \ \text{ при } |x| \leqslant 1, \quad v(x) = 0 \ \text{ при } |x| > 1.$$

   а) Построить решение графически для характерных моментов времени.

   Указание. Использовать формулу $\int\limits_{x-at}^{x+at} v(s)\,ds = V(x+at) - V(x-at)$, где $V(x) = \int\limits_0^x v(s)\,ds$.

   б) Выписать решение в аналитическом виде и построить его пространственно–временной график в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}^+$.